

Estimación del error en el cálculo de la superficie de una parcela

Ana Domingo Preciado
Julián Aguirre de Mata
Andrés Díez Galilea
Marina Martínez Peña
Juan Prieto Morín

Profesores de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía. Madrid

El objeto de este artículo es la estimación del error en el cálculo de la superficie de una parcela, a partir de las coordenadas de sus vértices, utilizando la teoría de propagación de las varianzas. Para ello se utilizarán dos métodos, por un lado el fotogramétrico y por otro las técnicas GPS.

En primer lugar se expondrá el método de propagación de precisiones aplicada, en el que intervendrán una serie de variables, que serán objeto de estudio posteriormente, y su influencia en el resultado final.

También se analizará la metodología por el método fotogramétrico en cada una de las etapas que permitirán estimar la superficie y su precisión.

De igual forma se estudiará la metodología GPS con el mismo objetivo, realizando medidas en campo de la superficie objeto de estudio.

Por último se obtendrán una serie de conclusiones de ambas metodologías.

Estimación del error en el cálculo de la superficie de una parcela, a partir de las coordenadas de sus vértices, utilizando la teoría de propagación de las varianzas

El método elegido en el presente estudio para calcular la superficie de una parcela y posteriormente las precisiones correspondientes ha sido la Fórmula de Gauss.

Disponemos de una parcela de n vértices de coordenadas:

$$(x_1, y_1) \dots\dots (x_n, y_n)$$

Según dicha fórmula, la superficie de la figura puede calcularse:

$$A = \frac{1}{2} \left[(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) + \dots + (x_1 - x_n)(y_1 + y_n) \right]$$

Es decir la superficie es una función no lineal de las coordenadas de los vértices del polígono. Por tanto las precisiones en la determinación de dichas coordenadas influirán de forma determinante en la precisión final del área.

Recordando la ley de propagación para las varianzas en el caso no lineal, siendo las magnitudes originales independientes:

$$A = F(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2 \quad (1)$$

En nuestro caso las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (y_{i-1} - y_{i+1}) \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{1}{2} (x_{i-1} - x_{i+1})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{2} (y_n - y_2) \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{1}{2} (x_2 - x_n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{1}{2} (y_{n-1} - y_1) \quad \frac{\partial F}{\partial y_n} = \frac{1}{2} (x_1 - x_{n-1})$$

Sustituyendo estas expresiones en (1):

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2$$

y suponiendo que la precisión en todos los puntos es la misma, σ , finalmente se obtiene:

$$\sigma_A = \frac{\sigma}{2} \sqrt{(y_n - y_2)^2 + (x_n - x_2)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} [(y_{i-1} - y_{i+1})^2 + (x_{i-1} - x_{i+1})^2] + (y_{n-1} - y_1)^2 + (x_1 - x_{n+1})^2}$$

En realidad, si lo que se pretende es establecer tolerancias, el valor representaría el error máximo en la determinación de los vértices.

Analicemos ahora cuáles serían las fuentes de error en las coordenadas de los vértices en el caso de que dicha medida se esté realizando un proceso de restitución fotogramétrica.

De forma rigurosa, el análisis se haría estudiando cada uno de los pasos anteriores a la restitución propiamente dicha:

1. Orientación Interna.
2. Orientación Relativa: Suponiendo una correcta realización de dicho proceso desde el punto de vista de la distribución de los puntos de Gruber, se podría considerar una tolerancia dada por la componente cuadrática de las paralajes y resultantes de la orientación, como se verá a continuación.
3. Orientación Absoluta: Se consideran las precisiones obtenidas en los parámetros de la transformación de Helmert tridimensional, obtenidas en la matriz inversa de la Matriz N de ecuaciones normales, siempre dando por correctos y sin error los puntos de control que han intervenido en el cálculo.
4. Fase de Restitución: La restitución de la parcela en cuestión puede realizarse en dos modos, punto a punto y continuo. El método elegido influirá en la precisión final de la superficie calculada.

Una vez establecida la tolerancia en restitución, la precisión o error máximo en la coordenada de un vértice

tice, vendrá dada por la composición de la tolerancia de las fases anteriores y esta recién calculada. Dicho valor final será el que se sustituirá en la fórmula de propagación de las varianzas para la Fórmula de Gauss.

Desarrollo

Estudio pormenorizado de las precisiones en fotogrametría

Medidas interactivas

Las medidas interactivas dependen:

- Buena identificación del elemento o detalle.
- Resolución.
- Tamaño del cursor.
- Tamaño del píxel.

En última instancia, el tamaño del píxel marca el límite inferior. Suponiendo que el error máximo es de 2 píxeles, la desviación típica o estándar es aproximadamente de 0,5 píxel. En los procesos de automatización de determinadas tareas fotogramétricas es interesante contemplar las precisiones subpíxel.

Procesos de orientación

Los factores que intervienen en la precisión de la *orientación interna* son:

- Calibración de la cámara.
- Deformación de la imagen.
- Instrumento utilizado en la medida de coordenadas.

} Transformación
2D

En condiciones óptimas de trabajo los valores máximos aconsejados son:

5 μm a 10 μm

Los factores que intervienen en la precisión de la *orientación relativa* son:

- Utilización de pocos puntos (falta de redundancia de observaciones) \rightarrow incertidumbre.
- Mala distribución de los puntos en el modelo.

En condiciones óptimas de trabajo los valores máximos, del residuo del paralaje en y , aconsejados son:

4 μm a 6 μm
(depende de la calidad de la imagen)

Es importante considerar la propagación sistemática del error entre modelos y en su caso atenuar sus efectos.

Los factores que intervienen en la precisión de la *orientación absoluta* son:

- Parámetros de orientación absoluta.
- Distribución, identificación y medida de los puntos de control.

La transformación espacial se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} + m \cdot R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cuya linealización es:

$$X = dX_u + (1 + dm) dR \cdot x$$

La ley general de propagación del error, aplicado a dicha ecuación la expresamos en los términos siguientes:

$$\sigma_{x,y,z}^2 = \sigma_0^2 \cdot A Q_{xx} \cdot A^T + B$$

donde:

$$\sigma_{x,y,z}^2 = \text{varianzas en las coordenadas.}$$

$$\sigma_0^2 = \text{varianza de referencia.}$$

A = matriz de coeficientes (coordenadas aproximadas de la esquina del modelo).

Q_{xx} = matriz de coeficiente de pesos o matriz de cofactor de los parámetros de la transformación.

B = matriz de incertidumbre de los puntos medidos en la orientación absoluta del modelo (coordenadas modelo).

$\sigma_0^2 \cdot A Q_{xx}$ = error producido por la incertidumbre de los elementos de la orientación absoluta.

En cualquier caso: $\sigma_0^2 \cdot A Q_{xx} < B$ sería recomendable para la toma de datos y los valores serán función de la escala de los fotogramas.

Restitución

La distribución de errores en un modelo estereoscópico es función de:

- Deformación de la película, distorsión de las lentes, etc.
- Instrumento de medida.
- Número de puntos de control.
- Procedimientos de orientación.

Fotogrametría aérea

- Coordenadas de puntos aislados.

Con la singularidad de la fotografía aérea de gran escala (por el movimiento de imagen), la precisión de las coordenadas x e y (precisión planimétrica) es directamente proporcional a la escala de la imagen, y constante en la misma.

El error medio cuadrático σ_z en altimetría:

$$\sigma_z = \frac{Z}{f} \frac{Z}{B} dp = m_b \left(\frac{Z}{B} \right) dp$$

donde:

m_b = escala del fotograma.
 Z = altura media de vuelo.

B = base entre tomas fotográficas en el terreno.

f = distancia focal calibrada.

d_p = diferencial de la paralaje: $d_p = 0,010 \mu m$.

Para una base constante, se incrementa con el cuadrado de la distancia de la cámara al objeto. Pueden considerarse los siguientes valores para *puntos señalizados*:

Planimetría $\sigma_{xy} = \pm 6$ en la imagen.

Altimetría $\sigma_z = \pm 0,06 \%$ de la altura de vuelo (objetivo gran angular y normal) y $\sigma_z = \pm 0,08 \%$ de la altura de vuelo (objetivo súper gran angular).

Como ejemplo tenemos el caso de un vuelo realizado a escala 1:5.000, con un recubrimiento del 60% y una focal de 150 mm.

$$\sigma_{xy} = 5000 * 0,0006 = \pm 3 \text{ cm.}$$

$$\sigma_z = 5000 * 15 * 6 \cdot 10^{-5} = \pm 4.5 \text{ cm.}$$

Como norma general también se aplica en el caso de *puntos naturales*, pero con la condición de añadir la incertidumbre de la definición del punto $\sigma_{(def)}$:

Planimetría:

$$\sigma_{xy(nat)} = \sqrt{\sigma_{xy(señ)}^2 + \sigma_{xy(def)}^2}$$

Altimetría:

$$\sigma_{z(nat)} = \sqrt{\sigma_{z(señ)}^2 + \sigma_{z(def)}^2}$$

En el cuadro 1 podemos ver algunos casos de incertidumbre en la definición de los puntos naturales.

El error medio cuadrático en la distancia σ_s calculado a partir del error en coordenadas σ_{xy} será:

$$\sigma_s = \sigma_{xy} \sqrt{2}$$

La precisión de las distancias calculadas a partir de las coordenadas medidas por fotogrametría es independiente de la distancia.

Cuadro 1
Definición de puntos naturales

Tipo de punto	Planimetría $\sigma_{xy(def)}$	Altimetría $\sigma_{xy(def)}$
Esquinas de casas y alambradas	7-12 cm	8-15 cm
Tapa de registro	4-6 cm	1-3 cm
Esquina de parcelas	20-100 cm	10-20 cm
Matas, árboles, etc.	20-100 cm	20-100 cm

• Líneas planimétricas

La restitución continua, como es lógico, es menos precisa que la determinación puntual. Heissler a través de un test empírico nos demuestra una precisión independiente de la escala fotográfica, cuyo valor es:

$$\sigma_G = \pm 45 \mu\text{m en la fotografía}$$

Pudiéndose mejorar mediante una restitución con manivelas y buena experiencia del operador.

La precisión en la cartografía es de ± 0.2 mm por el denominador de la escala gráfica. Por lo tanto, la relación fotografía/mapa es de 1:5. Este valor lo podemos fijar para escalas entre 1:1.000 y 1:2.000. Para escalas más pequeñas la tolerancia fijada por la precisión no puede ser considerada en estos términos o criterios, ya que, la interpretación de los elementos lineales esta limitada es decir pierde definición.

Por lo tanto, podemos considerar que la relación en la selección de la escala del fotograma es función de:

1. La precisión para escalas grandes (3.000 ... 8.000) y medianas (10.000 ... 20.000) de cartografía.
2. La interpretación en escalas pequeñas (30.000 ... 70.000).

La expresión empírica que relaciona la escala del mapa y la del fotograma es:

$$m_b = k\sqrt{m_k}$$

Donde:

m_b = escala fotograma.

m_k = escala de la cartografía.

k = depende de la calidad de la fotografía y el instrumento de medida. Varía entre 200 y 300.

Veamos la siguiente relación entre la escala de la cartografía y la fotografía aérea:

1: m_k	m_b
1:1.000	6.300 - 9.500
1:5.000	14.000 - 21.000
1:10.000	20.000 - 30.000
1:25.000	32.000 - 47.000
1:50.000	45.000 - 67.000

• Curvas de nivel

La precisión en el trazado continuo de las curvas de nivel en un modelo estereoscópico se puede expresar como función de la pendiente del terreno a en la formula de Koppe:

$$\sigma_H = \sigma_Z + \sigma_G \cdot \tan\alpha$$

Donde:

σ_Z = precisión en la medida altimétrica de líneas continuas para fotografías con un 60% de recubrimiento longitudinal.

σ_Z = 0.2 ‰ de la altura de vuelo para objetivos normales o gran angular.

$\sigma_z = 0.25 \text{ ‰}$ de la altura de vuelo para objetivos súper gran angulares.

Los errores son mayores que en la fórmula anterior pues no debemos olvidar que hablamos de una toma de datos continua y no estática punto a punto.

σ_G = precisión planimétrica de las curvas de nivel.

$\sigma_G = \pm 100 \text{ }\mu\text{m}$ en fotografías para escalas grandes de cartografía.

En este caso también los errores son mayores ya que las curvas no están marcadas en el modelo y deben identificarse por la sensibilidad del “posado estereo continuo”.

$\sigma_G = \pm 0.2 \text{ mm}$. Para escalas pequeñas de mapa.

El segundo término suele ser muy pequeño y en terrenos llanos despreciable. Como regla general en la precisión, tomamos como expresión:

$$\sigma_H = \pm 0.25 \text{ ‰ } Z$$

Levantamiento de los límites de parcelas

- Señalización y medidas de control

Los puntos medidos por fotogrametría y que definen el límite de la parcela serán señalizados antes del vuelo (preseñalización). El tamaño de las señales utilizadas puede variar entre 10 y 20 cm para escalas de imagen normalmente utilizadas en fotogrametría para fines catastrales:

$$d(\text{cm}) = \frac{m_b}{300 \text{ a } 600}$$

Siendo:

m_b = escala de la foto.

d = diámetro de la señal.

El rango de valores que permite el denominador de esta ecuación será función del contraste:

- Fotografías aéreas de pequeña escala, 1:30.000:
 $d = 50 \text{ a } 100 \text{ cm}$.
- Fotografías aéreas de gran escala, 1:4.000:
 $d = 7 \text{ a } 13 \text{ cm}$.

Las medidas catastrales realizadas por fotogrametría deben comprobarse, en un porcentaje, también sobre el terreno por métodos de topografía clásica. La toma de datos en campo no solamente permite el chequeo del trabajo realizado sino también su utilización en el ajuste. Esto supone un incremento significativo en la precisión total del trabajo. Estudios teóricos y empíricos han demostrado que el error medio cuadrático se reduce en un factor aproximado de $1/\sqrt{2}$ con la inserción de medidas precisas en el terreno.

Alternativas en la elección de la escala de imagen para una determinada precisión

El parámetro más importante en fotogrametría aérea es la escala de la fotografía. Se define en fotogrametría catastral por la precisión requerida en el producto final. En este sentido se proponen dos caminos:

i) Diferencias de longitud como error límite

El límite de error (máximo error permitido) está indicado como la diferencia Δs entre dos longitudes. Una longitud, S_p , está calculada a través de la medida de coordenadas fotogramétricas y la otra longitud, S_t , está medida directamente en el campo.

El error límite viene definido como:

$$\Delta S_{\max} = a_1 s + a_2 \sqrt{s} + a_3 \geq |s_p - s_t|$$

Los a_i son los coeficientes obtenidos como función de los valores del terreno. Puesto que las precisiones de fotogrametría dependen muy poco de la longitud s , por lo que la escala fotográfica depende en mayor medida del coeficiente a_3 , es decir sobre longitudes muy pequeñas. La relación entre la media cuadrática del error σ_{sp} de longitud fotogramétrica y la media cuadrática del error σ_{st} de la longitud en el terreno, junto con la diferencia máxima permitida de longitud $\Delta s_{\max} = a_3$ es, en el supuesto de que el error máximo sea tres veces el error medio cuadrático:

$$a_3 = 3\sqrt{\sigma_{sp}^2 + \sigma_{st}^2}$$

El error medio cuadrático σ_{sp} de la longitud calculada a partir de las coordenadas fotogramétricas es linealmente dependiente de la escala del fotograma:

$$\sigma_{sp}[\text{cm}] = \frac{m_b \sqrt{2} \cdot 4[\mu\text{m}]}{\sqrt{2} \cdot 10.000} = \frac{m_b}{2.500}$$

$4 \mu\text{m}$ → error medio cuadrático de la coordenada después del ajuste del bloque de haces con parámetros adicionales de puntos señalizados, referidos a la fotografía.

$\sqrt{2}$ → (en el numerador) conversión de errores en coordenadas a errores en longitud.

$\sqrt{2}$ → (en el denominador) incremento de la precisión por inclusión de datos de control terreno en el ajuste.

El error medio cuadrático σ_{st} alcanzado, de la longitud de las medidas terrestres puede ser tomado directamente a partir de los coeficientes a_3 , ya que a_3 es además el límite del error de la diferencia entre dos medidas independientes de longitud en el terreno.

$$\sigma_{st} = \frac{a_3}{3\sqrt{2}}$$

Despejando y sustituyendo en las anteriores ecuaciones podemos obtener la siguiente expresión:

$$m_b = \frac{2.500 \cdot a_3[\text{cm}]}{3\sqrt{2}} \approx 600 \cdot a_3[\text{cm}]$$

ii) Diferencia puntual como error límite

En este caso el error límite (máximo error permitido) está determinado por la diferencia ΔP entre dos medidas independientes del mismo punto. Si las medidas se realizan con el mismo error medio cuadrático del punto, tendremos la siguiente relación entre el error límite ΔP_{\max} y el error medio cuadrático del punto σ_p para la medida de puntos por fotogrametría:

$$\Delta P_{\max} = 3\sqrt{2} \cdot \sigma_p$$

El error medio cuadrático de los puntos fotogramétricos σ_p es linealmente dependiente del valor numérico de la escala del fotograma m_b :

$$\sigma_p [\text{cm}] = \frac{m_b \sqrt{2} \cdot 4[\mu\text{m}]}{10.000 \sqrt{2}} = \frac{m_b}{2.500}$$

$4[\mu\text{m}]$ y $\sqrt{2}$ → en el numerador se ha visto anteriormente.

$\sqrt{2}$ → en el denominador representa la conversión del error en coordenadas a error en el punto.

Por último podemos determinar la escala fotográfica a través de la expresión siguiente:

$$m_b = \frac{2.500 \cdot \Delta P_{\max}[\text{cm}]}{3\sqrt{2}} \approx 600 \cdot \Delta P_{\max}[\text{cm}]$$

Si comparamos las dos alternativas llegamos a la conclusión de que el error límite es el mismo.

En los levantamientos catastrales la precisión altimétrica no es muy relevante pues son levantamientos en dos dimensiones (x, y). Por otro lado, la precisión es independiente del tipo de cámara, aunque son preferibles las longitudes focales largas pues minimizan ángulos muertos producidos por edificios altos, árboles, etc...

Teniendo en cuenta que las escalas para Catastro son en su gran mayoría 1:1000 para urbana y 1:5000 para rústica se podría obtener a_3 de esta forma.

Así $a_3 = 1.000/600 = 1,7$ cm en urbana y 8,3 cm en rústica.

Estudio de precisiones en ortofotos

La calidad de una ortofoto depende de muchos factores:

- La calidad de la cámara.
- La relación de ampliación de escala entre fotografía y ortofoto.
- Las resoluciones tanto radiométrica como geométrica de la fotografía original.
- La selección de los puntos de control.
- El proceso de orientación del fotograma y su posterior rectificación.
- Densidad de los puntos del MDT utilizado en el cálculo de la ortofoto y, sobre todo, la calidad de éstos.
- El tamaño de píxel final.
- El balance radiométrico de la ortofoto.

Asumiendo estos parámetros de entrada correctos, la precisión alcanzada es comparable a la dada en los mapas de línea.

La relación de ampliación de escala entre fotografía y ortofoto marca la relación entre ambas escalas. Este factor de relación debería estar en un rango entre 5 y 9. Utilizar un factor menor que 5 supone que se desaprovecharía la escala de la foto y se necesitaría mayor número de fotogramas para realizar un mosaico de ortofotos,

mientras que un factor mayor de 9 está desaconsejado porque la resolución de entrada no es suficiente para llegar a diferenciar detalles visibles a la escala destino. Esto supone que para una escala de ortofoto 1:1.000 sería aconsejable una escala de fotografía en un intervalo entre 1:5.000 y 1:9.000.

La resolución de escaneo tendría que calcularse en función del factor de relación de ampliación de escala ya descrita, de forma que para cada aumento de éste se aumentara en 240 dpi (puntos por pulgada) la resolución de la fotografía original. Este parámetro sería equivalente, si se utiliza la nomenclatura de micras, a dividir 100 micras por el factor o nivel de ampliación, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo para un nivel de ampliación de 5:

$$\text{Nivel 5} \cdot 240 \text{ dpi} = 1.200 \text{ dpi}$$

o también:

$$100 \mu\text{m} / 5 = 20 \mu\text{m} \quad (1.200 \text{ dpi} \approx 20 \mu\text{m})$$

$$\text{Nivel 6} \cdot 240 \text{ dpi} = 1.440 \text{ dpi}$$

o también:

$$100 \mu\text{m} / 6 = 17 \mu\text{m} \quad (1.440 \text{ dpi} \approx 17 \mu\text{m})$$

$$\text{Nivel 7} \cdot 240 \text{ dpi} = 1.680 \text{ dpi}$$

o también:

$$100 \mu\text{m} / 7 = 15 \mu\text{m} \quad (1.680 \text{ dpi} \approx 15 \mu\text{m})$$

El tamaño del píxel de la ortofoto final también es un parámetro a tener en cuenta. Se estima que éste puede ser entre 1 y 2 veces el tamaño del píxel de escaneo.

Como se puede entender, estos tres parámetros se evalúan conjuntamente y en el siguiente ejemplo lo comprobamos: para obtener una ortofoto a escala 1:5.000, se tiene que utilizar fotografía aérea a escala 1:25.000 ($5.000 \cdot \text{factor } 5 = 25.000$), que tiene que ser escaneado a $20 \mu\text{m}$ ($100 / 5 = 20 \mu\text{m}$) y tendrá una resolución entre 50 cm y 1 m ($20 \mu\text{m} \cdot 25.000 = 50 \text{ cm} \cdot 1 = 50 \text{ cm}$). Como remuestreo en el cálculo de la ortofoto se utilizará la convolución cúbica.

La calidad del MDT dependerá de la topografía del terreno, ya que tendrá más densidad cuanto más abrupto sea el terreno. Además, se incluirá líneas de ruptura en el caso de grandes escalas, siendo éstas más importantes si cabe que la propia densidad. De todas formas la calidad requerida para un MDT destinado a realizar un mapa de línea siempre será mayor que el destinado a ortofoto.

El error o desplazamiento horizontal de los puntos no debería exceder 0.5 mm a la escala de la ortofoto, para poder calcular la precisión altimétrica del MDT. Por ejemplo, una ortofoto a escala 1:5.000 debería realizarse mediante un MDT en el que el error horizontal de los puntos no fuera mayor de $0.5 \text{ mm} \cdot 5.000 = 2.5 \text{ m}$ para que la precisión altimétrica de éstos sea tolerable.

El error en una ortofoto a partir del error producido en el MDT y según su posición en el fotograma es:

$$e_{\text{orto}} = e_{\text{MDT}} \cdot \text{tg } A$$

siendo

e_{orto} = el error en la posición horizontal en la ortofoto.

e_{MDT} = el error altimétrico en el MDT.

$\text{tg } A$ = la distancia radial al punto partido de la focal de la cámara.

En cuanto a la densidad del MDT, viene relacionada con la relación de ampliación. A mayor nivel de ampliación, menor densificación, es decir mayor distancia entre puntos del MDT. Para aumentos de 3 veces puede usarse una distancia de 4 a 8 mm a escala de la ortofoto. Si la relación está entre 3 y 8, el espaciado será entonces de 8 a 16 mm. Por último, si la relación es mayor de 8, dicha distancia será de 12 a 24 mm. Este espaciado puede variar en función de la topografía del terreno, siendo más denso en zonas abruptas y más espaciado en zonas llanas.

Una vez fijados estos parámetros se supone producida una ortofoto con suficiente calidad y precisión. Para conocer la exactitud con la que se ha realizado habría que hacer un estudio estadístico a posteriori, de los que existen varios estándares, como pueden ser el NSSD o el NMAS del Comité Federal de Datos Geográficos de EE.UU. (FGDC), en los que se implementan metodologías estadísticas para estimar la precisión en la localización de puntos en mapas y datos digitales geoespaciales.

Estudio de precisiones en el cálculo de coordenadas mediante técnicas GPS

Problemática de los levantamientos con GPS

El levantamiento de los puntos para topografía y cartografía ha venido apoyándose en las modernas técnicas GPS desde hace unos quince años en una frecuencia cada vez mayor. Los métodos y técnicas GPS desarrollados hasta el momento no sólo son capaces de conseguir levantamientos topográficos completos, sino que además, el sistema GPS también viene a asistir a otras técnicas cartográficas clásicas como puede ser la fotogrametría.

El análisis de las fuentes de error de los levantamientos asistidos de GPS no difiere en gran medida de los métodos de levantamientos clásicos, y en un primer nivel, las fuentes de error se pueden distinguir en dos grandes familias:

- Fuentes de error inherentes al propio sistema GPS.
- Fuentes de error por cambio de datum desde WGS-84.

En las primeras se integran factores tales como la calidad de las efemérides de satélites empleadas así como el estado de

su reloj, la activación o no por parte del Departamento de Defensa norteamericano de los dispositivos Disponibilidad Selectiva (SA) y Anti-Spoofing (AS), los retardos que sufre la señal al pasar por la ionosfera y la troposfera, la calidad del receptor, el estado de reloj del mismo, los efectos de multitraectoria o “multipath”, ... Por todos estos factores el error en el posicionamiento absoluto aportado por un receptor GPS en un instante dado en tiempo real varía entre 50 y 200 metros sobre su propio sistema de referencia WGS84. De todos estos factores, la denominada Disponibilidad Selectiva (SA), es la componente de mayor error y además la principal causante de su aleatoriedad. Desde el año 2000, el Departamento de Defensa a desactivado de la constelación la posibilidad de la SA, y ahora el error por posicionamiento absoluto en tiempo real es de unos 4 metros al 66% de confianza, siendo esta la precisión típica que se puede obtener con un navegador GPS de los que todos estamos acostumbrados ya a ver a diario. Este método de posicionamiento es el menos preciso de los existentes. Se basa en el uso del observable de código o pseudodistancia y su utilización en topografía y cartografía no pasa más allá del levantamiento de puntos para inventarios o para ingresarlos en un SIG de media escala.

Existen métodos de posicionamiento con GPS llamados diferenciales o relativos, porque en ellos no se obtienen las coordenadas de un punto sobre un sistema de referencia, sino que se obtiene la posición de un punto con respecto a otro del cual se requiere conocer su posición absoluta. Ni que decir tiene que este tipo de posicionamiento necesita del concurso de al menos dos receptores de GPS funcionando de forma simultánea. Pueden utilizarse los observables de código, como en el caso anterior, o también el segundo de los observables que dispone el GPS, las diferencias de fase, donde se consigue la mayor precisión que se puede obtener con

el sistema. Además, si estos métodos ofrecen la solución en el momento de la observación se habla de métodos en tiempo real. Por el contrario, si la solución no se obtiene hasta el posterior procesado de datos en gabinete se habla de métodos en postproceso. Estos últimos suelen ser más precisos.

Cómo resumen podemos decir que los métodos de trabajo con GPS se caracterizan por el tipo de solución que ofrecen, absolutos o diferenciales (relativos); por el observable que utilizan, código o diferencias de fase, y por el momento que se obtiene la solución, tiempo real o postproceso. Además, si el receptor no se mueve durante el levantamiento hablamos de métodos estáticos, mientras que si las diferentes posiciones se obtienen mientras el receptor está en movimiento se habla de métodos cinemáticos.

De todos los métodos que podrían resultar conjugando estas cuatro variables sólo se utilizan seis de ellos. El método estático puro, el más preciso de ellos donde se obtienen precisiones de 5 mm + 5 ppm en posicionamiento diferencial de fase en distancias de hasta centenas de kilómetros, eso sí, después de varias horas de observación. Una variante de este método es el estático rápido, donde el tiempo de observación pasa a ser de algunos minutos, pero la distancia máxima queda limitada a 20 km y la precisión se queda en 10 mm + 5 ppm. Este es el método que se utiliza en levantamientos de apoyo, puntos de control para fotogrametría o incluso redes de tipo municipal o provincial.

Si el receptor se mueve mientras está operativo se habla de método cinemático si la solución es en postproceso. La precisión que se logra está también en el entorno del centímetro más una parte por millón y hoy prácticamente ha quedado arrinconado por su variante en tiempo real, también conocido como RTK abreviatura de su denominación en inglés Real Time Kinematic. En el

método RTK se obtienen las coordenadas de los puntos en el propio campo en tiempo real, con precisiones del tipo 20 mm + 10 ppm. Queda limitado a una distancia de unos 5 km, y, aunque puede llegar a funcionar a 40 y hasta 60 km, desde luego no a la precisión antes comentada. Con este método se replantean puntos para obra civil o se efectúan los levantamientos topográficos finales.

En cuanto a los métodos diferenciales utilizando código únicamente sólo caben dos posibilidades, que la solución se aporte en tiempo real o a postproceso. El primero ofrece una precisión de unos 60 cm mientras que la variante a postproceso baja a unos 40 cm. Estos métodos se utilizan para actualizaciones de cartografía obsoleta, inventarios o toma de puntos para SIG.

En el cuadro 2 se resumen los principales métodos y sus precisiones.

Hay que volver a recalcar que estos valores están dados dentro del sistema de referencia geodésico de la propia constelación, que es el World Geodetic System de 1984, WGS-84, y que tiene asociado el elipsoide del mismo nombre. Este sistema es distinto del utilizado como sistema de referencia local para la referencia de la cartografía en España

(Península y Baleares), que es el denominado ED50, que utiliza como elipsoide asociado el Internacional o Hayford de 1924. Como un valor medio para la Península Ibérica, se puede decir que las posiciones de un mismo punto referidas a los sistemas WGS84 y ED50 varían en unos 230 metros por lo que la consideración de esta fuente de error no es baladí. Los levantamientos realizados en las Islas Canarias, como utilizan como datum de referencia destino REGCAN95 que está basado en WGS84 y es prácticamente coincidente con él, no tienen este problema.

El sistema WGS84 utiliza como sistemas de coordenadas las Cartesianas Geocéntricas (X, Y, Z), las Coordenadas Geográficas o Geodésicas (λ , ϕ , h) o Coordenadas planas UTM (x, y). El sistema ED50 usualmente utiliza las Coordenadas Geodésicas (λ , ϕ , h) o las Coordenadas planas UTM (x, y), aunque también se pueden definir el él un sistema de Coordenadas Cartesianas Tridimensionales (X, Y, Z).

Se pueden utilizar cuatro formas para referir las posiciones aportadas por el receptor GPS en WGS84 a ED50:

1. Transformación de semejanza espacial entre sistemas casi paralelos,

Cuadro 2
Resumen de precisiones con GPS

Métodos usuales	Observación	Componente constante (m)	Componente relativa (ppm)
Estático	Fase dif	0.005	5 3D
Estático-Rápido	Fase dif	0.01	5 3D
Cinemático	Fase dif	0.01	5 3D
RTK	Fase dif	0.02	10 3D
DGP post	Código dif	0.4	3D
DGP t. real	Código dif	0.6	3D
Absoluto	Código	3	3D

Variable: Métodos usuales de trabajo y precisiones típicas de los fabricantes de equipos receptores en el sistema WGS-84.

sobre las coordenadas cartesianas X, Y, Z, en ambos sistemas. Son un conjunto de tres translaciones, tres rotaciones y un cambio de escala. Es también conocida como transformación de Helmert 3D.

2. Transformación de Molodensky, admitiendo los sistemas paralelos se suele utilizar sobre las coordenadas geodésicas λ , φ , h, y que aporta cinco parámetros, tres translaciones y dos correcciones a los parámetros elipsoidales.
3. Transformación de semejanza sobre coordenadas planas, que se efectúa sobre las coordenadas planas UTM (x, y) en ambos sistemas, y que en esencia son cuatro parámetros, dos translaciones, un giro y un cambio de escala, Helmert 2D.
4. Ajustes polinómicos o similares, utilizando unos polinomios de superficie que aportan los incrementos de latitud y longitud entre ambos sistemas para cada punto en particular.

Los parámetros necesarios para utilizar estas transformaciones o ajustes los viene calculando el Instituto Geográfico Nacional, y los va mejorando conforme el propio Instituto realiza nuevas observaciones. Se puede realizar la transformación, dentro de un mismo sistema de referencia, en cualquiera de los sistemas de coordenadas, y referir la solución posteriormente a otro distinto a través del paso en los dos sentidos:

$$(X, Y, Z) \Leftrightarrow (\lambda, \varphi, h) \Leftrightarrow (x, y) \text{ UTM}$$

El IGN asegura una precisión mejor que 2 metros en los parámetros de Helmert, que junto con las transformaciones de Molodensky son los métodos más empleados y los más difundidos en los programas y aplicaciones cartográficas. Las transformaciones de Helmert tienen un error de unos 6 m

y al igual que las de Helmert, son soluciones a nivel nacional.

El IGN también aporta polinomios y superficies de mínima curvatura, cuyos errores los cifra en algunos centímetros, si bien su uso es todavía muy restringido porque no están implementados en las aplicaciones y rutinas cartográficas.

Fuera de la utilización de estas soluciones oficiales para el cambio de datum, bien porque no ofrecen suficiente precisión o bien porque no tenemos implementado el correspondiente algoritmo en nuestro programa, la solución para por hacer una determinación local de los parámetros de transformación de Helmert utilizando para ello suficientes puntos conocidos de antemano en los dos sistemas, el ED-50 y el WGS-84 o alguno de sus sistemas compatibles.

En la Península y en Baleares se disponen de dos tipos de redes para calcular estos parámetros, la Red geodésica de Orden Inferior (ROI) y la Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales (REGENTE). La primera de ellas tiene como ventaja un lado medio menor, unos 8 km, mientras que arrastra como inconveniente su heterogeneidad, baja precisión y que no tienen todos sus puntos coordenadas en el sistema WGS-84, por lo que habrá que levantarlos con GPS para asignarle coordenadas en este sistema. En los propios cálculos de compensación de los bloques provinciales de esta red, el propio IGN estima el error medio angular en unos seis segundos, que al cabo de los 8 km son un error medio de 10 cm en los vértices. Para la altimetría, el IGN aporta un error medio entre 20 y 30 cm. Tómense siempre estos errores como errores medios dentro de un bloque provincial y en el sistema ED-50 y altitudes ortométricas al nivel medio del mar.

En cambio, para la red REGENTE sobre el sistema ETRS-89 y altitudes elipsoidales, se estima un error planimétrico

medio entorno a un centímetro, mientras que en el caso altimétrico este valor se duplica. El principal inconveniente de esta red es su lado medio mayor, que se sitúa en unos 20 km. Tienen como ventaja que, al ser también pertenecientes a la ROI, disponen de coordenadas en el sistema ED-50.

Estos errores medios ponen de manifiesto por un lado la falta de homogeneidad del sistema ED-50 y por otro que el sistema ETRS-89 (WGS-84) es más de diez veces más preciso. En los distintos estudios de transformaciones de Helmert que hemos realizado en la ETSI de Topografía, Geodesia y Cartografía, en consonancia con los errores medios antes vistos, aparecen unos residuos en planimetría de unos 2 cm para los vértices de ROI más cercanos a la zona de trabajo, mientras que para la altimetría los residuos medios rondan los 5 cm. En cambio, para los puntos REGENTE, al estar más alejados arrojan unos residuos medios de unos 10 cm en planimetría y en altimetría, al no utilizar modelo de geoides, estos residuos rondan los 20 cm.

En el cuadro 3 se resumen estos datos y se calculan unos errores relativos por cambio de datum, donde se aprecia que utilizando en la transformación de Helmert vértices de la red REGENTE se duplica el error por cambio de datum.

Desde luego el error medio final en los puntos levantados con GPS y transformados al sistema ED50 tiene como valor la

raíz de la componente cuadrática de ambos errores, los inherentes a los propios métodos de levantamiento por técnicas GPS y los errores provocados por transformar la geometría obtenida con GPS desde su sistema de referencia WGS-94 al oficial español ED-50. Se han elaborado para su estudio tres supuestos dados habitualmente en levantamientos topográficos donde se han utilizado los tres métodos más comúnmente usados en GPS, estático, estático-rápido y RTK, y su transformación al datum oficial ya sea usando vértices de la red ROI o vértices de la red REGENTE. Estos supuestos son el levantamiento de puntos para una red principal tipo municipal o regional con una distancia media entre vértices de unos 3 km, puntos de apoyo fotogramétrico para vuelo bajo con unos 1.000 metros de distancia media, y el tercer supuesto puntos de linderos o de detalle con una distancia media de 500 metros a la red principal (ver cuadro 4).

En los cuadros anteriores se observa como los métodos en tiempo real, RTK, duplican en error a los métodos estáticos e incluso en algunos casos los triplican. Los métodos de distancia media mayor reflejan un aumento del error en altimetría. Aún así, para una red topográfica de apoyo el error en planimetría se sitúa en los 2 cm y en 3 para altimetría. Los métodos de cambio de datum que se basan o apoyan en puntos de la red REGENTE siempre arrojan un error final mayor, que aumenta con la distancia media de la red, aunque esta

Cuadro 3
Errores por cambio de datum

Red de apoyo	Resid. planimetría	Resid. altimetría	Distancia media (km)	Err. relativo planimetría (ppm)	Err. relativo altimetría (ppm)
ROI	0.02	0.05	8	2.5	6.25
REGENTE	0.10	0.20	20	5	10

Variable: Redes usuales de apoyo para efectuar el cambio de datum WGS84 a ED50.

Cuadro 4
Error en los puntos levantados

Tipo de punto	Distancia media (m)	Error planimétrico (m)	Error altimétrico (m)	Cambio datum
Red principal	3.000			
Estático		0.021	0.027	ROI
Estático-Rápido		0.026	0.031	ROI
RTK		0.051	0.053	ROI
Estático		0.025	0.036	REGENTE
Estático-Rápido		0.029	0.039	REGENTE
RTK		0.052	0.058	REGENTE
P. Apoyo V. Bajo	1.000			
Estático		0.010	0.012	ROI
Estático-Rápido		0.015	0.016	ROI
RTK		0.030	0.031	ROI
Estático		0.011	0.014	REGENTE
Estático-Rápido		0.016	0.018	REGENTE
RTK		0.030	0.032	REGENTE
Punto Radiado	500			
Estático		0.008	0.008	ROI
Estático-Rápido		0.013	0.013	ROI
RTK		0.025	0.025	ROI
Estático		0.008	0.009	REGENTE
Estático-Rápido		0.013	0.013	REGENTE
RTK		0.025	0.025	REGENTE

cantidad es mínima si se compara con la ventaja de no tener que visitar más que uno de ellos para enlazar el levantamiento con el sistema ETRS-89. El error de los puntos de definición de linde o de detalles radiados desde los puntos de la red principal de apoyo está en el entorno del centímetro, tanto en planimetría como en altimetría y para calcular su error total habría que componerlo con el error con que se ha levantado el punto de la red principal sobre el que se apoyan. Este valor está en el entorno de los 3 cm.

Conclusiones

Como resumen de todo lo expuesto en el artículo y a modo de conclusión final, se han elaborado unos cuadros resumen (ver Anexo) en los que aparecen los valores máximos esperables de los errores cometidos en la determinación de la superficie de una parcela, así como en forma de porcentaje.

Siguiendo la estructura del artículo, en primer lugar aparece el cuadro correspondiente a la metodología fotogramétrica. Se

ha realizado un único cuadro sin distinción de Fotogrametría Analítica y Digital pues los autores entienden que el tamaño del índice en F. Analítica (15 micras) es equivalente a la resolución del píxel en F. Digital (15 micras).

A continuación aparece el cuadro correspondiente a la metodología basada en ortofotos y se ha considerado una escala 5.000 para catastro de rústica y una resolución de escaneo de 20 micras. Se han utilizado para su elaboración las fórmulas desarrolladas en el artículo precedente.

Para el cálculo del valor σ_{xy} se ha considerado la componente cuadrática del error acumulado en la generación de la ortofoto y el error propio de la digitalización sobre ella (el caso más desfavorable sería un error de un píxel).

A continuación aparecen unos cuadros que resumen el estudio realizado con técnicas de campo. Se ha obtenido un cuadro con las tolerancias nominales que tienen en porcentaje de superficie las parcelas tipo con las tres escalas en función de un error de apreciación de 0.2 mm x el denominador de la escala.

La tolerancia de los puntos en la escala 1/2.000 son 40 cm. Consultando el cuadro que aparece en el artículo, sólo se puede conseguir con métodos GPS de fase.

La tolerancia mínima es la de la escala 1/500, y son 10 cm. Del mismo cuadro se

deduce que cualquiera de los métodos de fase es suficiente.

Analizando el caso más desfavorable, método RTK, se ha elaborado el cuadro titulado "Errores en levantamientos GPS de fase", donde se dan los errores en porcentaje en función de las superficies y la utilización en la Península y Baleares (ED.50) y Canarias (REGCAN95). En el artículo también se comentaba que los trabajos en Canarias se ahorran los errores por cambio de datum, al ser REGCAN95 compatible con WGS84.

Como el método es el mismo (el peor de ellos: RTK) se entiende que los errores son los mismos para las escalas estudiadas (2.000, 1.000, 500) y por eso sólo se ha distinguido errores en función de datum destino.

Si se hubiese estudiado la escala 1/5.000, el método DGPS hubiese sido válido, y entonces sí habría opción a distinguir entre escalas.

Bibliografía

- KRAUS, K. (1992). *Photogrammetry*. Duemmler Verlag, Bonn.
- STRANG, GILBERT (1997). *Linear algebra, geodesy and GPS*. Wellesley-Cambridge Press.
- MANZER, GARY (1996). "Avoiding Digital Orthophoto Problems", *Digital Photogrammetry: An Addendum to the Manual of Pphotogrammetry*, ASPRS, pp. 158-162. ■

(Ver Anexo, en páginas siguientes).

Anexo

Metodología fotogramétrica

Lado (m)	Escala vuelo	30.000		20.000		8.000		5.000	
	σ_{xy} (μ)	1,02		0,61		0,32		0,2	
	Sup. parcela	m ²	%	m ²	%	m ²	%	m ²	%
316,2	100.000	646,1	0,6	386,2	0,4	202,5	0,2	126,5	0,1
223,6	50.000	457,2	0,9	273,2	0,5	143,2	0,3	89,5	0,2
100,0	10.000	205,0	2,1	122,4	1,2	64,1	0,6	40,0	0,4
70,7	5.000	145,3	2,9	86,6	1,7	45,4	0,9	28,3	0,6
31,6	1.000	65,6	6,6	39,0	3,9	20,3	2,0	12,7	1,3
22,4	500	46,7	9,3	27,7	5,5	14,4	2,9	9,0	1,8
14,1	200	29,9	14,9	17,6	8,8	9,2	4,6	5,7	2,8

Metodología basada en ortofotos

Lado (m)	Escala Orto	5.000		5.000	
	Escala vuelo	25.000		15.000	
	σ_{xy} (en orto)	0,72		0,43	
	Sup. parcela	m ²	%	m ²	%
316,2	100.000	455,9	0,5	272,1	0,3
223,6	50.000	322,5	0,6	192,5	0,4
100,0	10.000	144,5	1,4	86,2	0,9
70,7	5.000	102,3	2,0	61,0	1,2
31,6	1.000	46,1	4,6	27,4	2,7
22,4	500	32,7	6,5	19,4	3,9
14,1	200	20,9	10,4	12,3	6,2

Resumen de precisiones con GPS

Métodos usuales	Observación	Componente constante (m)	Componente relativa (ppm)
Estático	Fase dif	0,005	5 3D
Estático-Rápido	Fase dif	0,01	5 3D
Cinemático	Fase dif	0,01	5 3D
RTK	Fase dif	0,02	10 3D
DGP post	Código dif	0,4	3D
DGP t. real	Código dif	0,6	3D
Absoluto	Código	4	3D

VARIABLE: Métodos usuales de trabajo y precisiones típicas en los fabricantes de equipos.

Cambio de datum

Red de apoyo	Resid. Pla (m)	Resid. Alt. (m)	Distancia media (km)	Relativo Pla (ppm)	Relativo Alt (ppm)
ROI	0,02	0,05	8	2,5	6,25
REGENTE	0,1	0,2	20	5	10
Otras					

VARIABLE: Redes usuales de apoyo para efectuar el cambio de datum WGS84 a ED50.

Errores en levantamientos GPS de fase

Tipo de punto	Distancia (m)	Error Pla (m)	Error Alt (m)	Cambio datum
Red principal	3.000			
Estático		0,021	0,027	ROI
Estático-Rápido		0,026	0,031	ROI
Cinemático		0,026	0,031	ROI
RTK		0,051	0,053	ROI
DGP post		0,400	0,400	ROI
DGP t. real		0,600	0,600	ROI
Absoluto		4,000	4,000	ROI
Estático		0,025	0,036	REGENTE
Estático-Rápido		0,029	0,039	REGENTE
Cinemático		0,029	0,039	REGENTE
RTK		0,052	0,058	REGENTE
DGP post		0,400	0,401	REGENTE
DGP t. real		0,600	0,601	REGENTE
Absoluto		4,000	4,000	REGENTE
P. Apoyo V. Bajo	1.000			
Estático		0,010	0,012	ROI
Estático-Rápido		0,015	0,016	ROI
Cinemático		0,015	0,016	ROI
RTK		0,030	0,031	ROI
DGP post		0,400	0,400	ROI
DGP t. real		0,600	0,600	ROI
Absoluto		4,000	4,000	ROI
Estático		0,011	0,014	REGENTE
Estático-Rápido		0,016	0,018	REGENTE
Cinemático		0,016	0,018	REGENTE
RTK		0,030	0,032	REGENTE
DGP post		0,400	0,400	REGENTE
DGP t. real		0,600	0,600	REGENTE
Absoluto		4,000	4,000	REGENTE
Punto Radiado	300			
Estático		0,007	0,007	ROI
Estático-Rápido		0,012	0,012	ROI
Cinemático		0,012	0,012	ROI
RTK		0,023	0,023	ROI
DGP post		0,400	0,400	ROI
DGP t. real		0,600	0,600	ROI
Absoluto		4,000	4,000	ROI
Estático		0,007	0,007	REGENTE
Estático-Rápido		0,012	0,012	REGENTE
Cinemático		0,012	0,012	REGENTE
RTK		0,023	0,023	REGENTE
DGP post		0,400	0,400	REGENTE
DGP t. real		0,600	0,600	REGENTE
Absoluto		4,000	4,000	REGENTE

