

Emilio Benitez Aguado
Ingeniero en Geodesia y Cartografía
Ing. Tec. en Topografía
Profesor asociado a tiempo parcial, Departamento de
Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría de la UPV.
de la UPV
Asignatura Geodesia, Cartografía Matemática, G.P.S.,
G.P.S.,
Laboratorio de Geodesia
Jefe de Sección de Cartografía Catastral Informatizada.

Y Luis García-Asenjo Villamayor
Ingeniero en Geodesia y Cartografía
Ing. Tec. en Topografía
Profesor Titular del Departamento de Ingeniería
Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría
Asignatura Geodesia, Cartografía Matemática,
Laboratorio de Geodesia

GERENCIA TERRITORIAL VALENCIA - PROVINCIA

Introducción

Los Sistemas de referencia en principio no parecen tener mucha relación con el Catastro y sí con la Geodesia.

Pero si abrimos cualquier pliego de Prescripciones Técnicas de la Dirección General de Catastro, Urbana o Rústica, veremos que la mayoría de ellos empiezan definiendo el Sistema de Referencia y El Sistema Geodésico. Estos nos van a definir los distintos juegos de coordenadas con las que vamos a asignar las Referencias Catastrales.

Este artículo es un monográfico sobre los Sistemas de referencia y su evolución a lo largo de la historia, en función de los métodos de observación y la precisión utilizada para su definición.

SISTEMAS DE REFERENCIA

En Geodesia son necesarios dos tipos de sistemas:

- Sistemas de referencia terrestres.
- Sistemas de referencia espaciales.

Los sistemas de referencia terrestres o fijos a la Tierra se utilizan para determinar coordenadas de puntos sobre la superficie terrestre o en sus proximidades. Por tanto, al igual que la Tierra, están en continua rotación. En este tipo de sistemas de referencia no se cumplen las ecuaciones del movimiento de Newton

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

al aparecer aceleraciones rotacionales (centrífuga y de Coriolis²). Reciben por ello el nombre de sistemas *no inerciales*.¹

Estos sistemas pueden ser fácilmente relacionados con el campo gravitatorio. De esta forma, permiten establecer sistemas de coordenadas intuitivos, en los que se describen los movimientos tal y como se producen ante nuestros ojos. Estos sistemas asignan dos coordenadas para los

¹ Consultar en cualquier libro de física general, como por ejemplo *Curso de Física General*, L. Landau, A. Aljjezer, E. Lifshitz. Editorial MIR Moscú.

² Fuerza de corilis es la que rige la dirección los vientos y las borrascas.

desplazamientos planimétricos sobre la superficie terrestre y una tercera para definir la separación respecto a ésta.

Los sistemas de referencia fijos al espacio o *inerciales* son más apropiados para definir la situación y el movimiento de objetos externos a la Tierra, como las estrellas, los planetas y de forma especial, los satélites artificiales. Al ser sistemas libres de aceleración o *inerciales*, permiten efectuar cálculos empleando, sin modificaciones, la formulación newtoniana.

Ambos tipos de sistemas, con movimientos relativos entre ellos, deben estar perfectamente relacionados geoméricamente y en el tiempo, lo que constituye una de las razones fundamentales para explicar la necesidad que existe en geodesia de mantener una base de tiempos precisa.

La materialización física de los sistemas de referencia se establece dando coordenadas a una serie de puntos convenientemente monumentados, que constituyen el *marco de referencia*. De ésta forma, el marco de referencia para un topógrafo sería la red geodésica, formada por los vértices geodésicos y las coordenadas asociadas a los mismos.

Pero en rigor, las coordenadas de puntos situados sobre la superficie terrestre experimentan variaciones en el tiempo, lo que en la práctica se pone de manifiesto en mayor medida al aumentar la precisión de las observaciones geodésicas. Esta variación se debe fundamentalmente a dos tipos de hechos:

- Los desplazamientos y deformaciones que experimenta la corteza terrestre, a la que están sujetos los vértices geodésicos y que producen variaciones relativas de coordenadas.
- Las variaciones de dirección que experimentan los ejes de los sistemas de referencia terrestres respecto al espacio, lo que produce una variación de las coordenadas absolutas de los vértices geodésicos.

La Tierra, en continua rotación, también se desplaza en el espacio. Por ello, tradicionalmente se ha establecido una fuerte relación entre las coordenadas geodésicas y las coordenadas de objetos aparentemente fijos, como las estrellas. Las estrellas, aunque dotadas de movimiento propio, han sido una buena referencia hasta que las necesidades de precisión en los sistemas de referencia de la comunidad científica han exigido puntos de referencia más estables, como las radiofuentes extragalácticas o quásares. En la actualidad una serie de constelaciones de satélites artificiales cuyas órbitas están referenciadas al sistema inercial definido por las radiofuentes, constituyen la materialización de los sistemas de referencia empleados en la actualidad.

3.1. SISTEMAS DE REFERENCIA TERRESTRES

3.1.1. Sistema astronómico local

Todas las medidas geodésicas clásicas, excepto las distancias geométricas, deben realizarse materializando físicamente la vertical astronómica del lugar, y a ella están referidas.

Se define así un sistema astronómico local en P, punto de estación considerado, con ejes

eje $z \rightarrow$ sigue la dirección del vector gravedad en P y tiene sentido contrario.

eje $y \rightarrow$ tangente a la superficie equipotencial que pasa por P y dirección Norte.

eje $x \rightarrow$ tangente a la superficie equipotencial que pasa por P y dirección Este.

Las observaciones clásicas en este sistema, entre el punto de estación i y el punto visado j son:

$\mathbf{a} \rightarrow$ acimut

$\mathbf{b} \rightarrow$ ángulo cenital

$D \rightarrow$ distancia geométrica

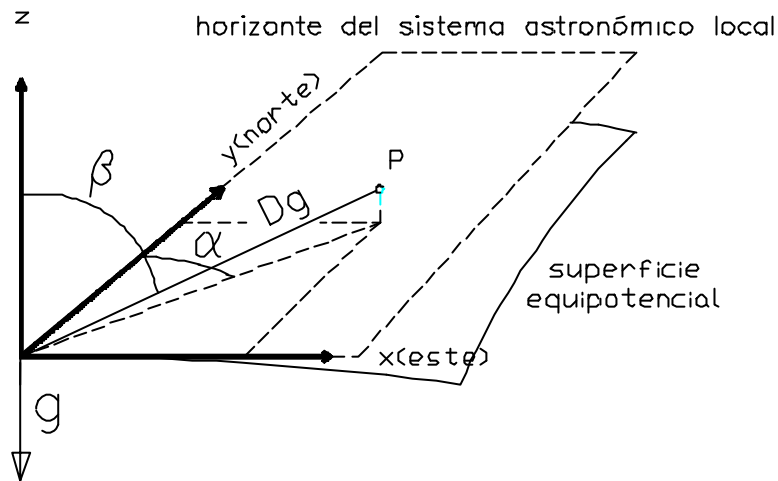


Fig. 3. 1. Sistema astronómico local.

que traducido a incrementos de coordenadas en el sistema astronómico local

supone

$$x_{ij} = D_{ij} \operatorname{sen} \mathbf{b}_{ij} \operatorname{sen} \mathbf{a}_{ij}$$

$$y_{ij} = D_{ij} \operatorname{sen} \mathbf{b}_{ij} \operatorname{cos} \mathbf{a}_{ij}$$

$$z_{ij} = D_{ij} \operatorname{cos} \mathbf{b}_{ij}$$

siendo las funciones recíprocas

$$\mathbf{a}_{ij} = \operatorname{arctg} \left(\frac{x_{ij}}{y_{ij}} \right)$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \operatorname{arccos} \left(\frac{z_{ij}}{D_{ij}} \right)$$

$$D_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2}$$

El problema que presenta un sistema como el descrito es que solamente es válido para zonas muy limitadas. El eje z sigue siempre la dirección del vector gravedad y éste, normal a la superficie equipotencial coincidente con el punto de estación, sigue una dirección diferente en cada punto. Por tanto, el sistema de referencia experimentará una rotación, cuya magnitud dependerá de la curvatura que presenten las superficies equipotenciales del campo gravitatorio. Es decir, que el sistema astronómico local no constituye en rigor un sistema de referencia válido

para efectuar un levantamiento de coordenadas, ya que es único para cada punto. Constituye mas bien un sistema instrumental para referir las observaciones.

Por tanto la práctica empleada a veces en topografía de determinar incrementos de coordenadas para cada estación y tratarlos conjuntamente, como si estuvieran en el mismo sistema de referencia, no es en absoluto válido para cálculos geodésicos.

3.1.2. Sistema astronómico global

El sistema astronómico global surge como respuesta a la necesidad de encontrar un sistema de referencia asociado al campo gravitatorio, cuyos ejes no experimenten ninguna rotación y sean independientes del punto en cuestión.

De esta forma, en el campo de gravedad terrestre se define, como sistema natural de coordenadas, el sistema astronómico global.

Es necesario definir en primer lugar el concepto de *meridiano astronómico*. Se entiende por meridiano astronómico de un punto el plano que conteniendo al vector gravedad en dicho punto es paralelo al eje de rotación.

Un punto cualquiera P viene definido en el sistema astronómico global por tres coordenadas

Latitud astronómica F . Ángulo, medido en el plano del meridiano astronómico, que forman la tangente a la dirección de la línea de la plomada en P y el plano del ecuador.

Longitud astronómica L . Ángulo, medido en el plano del ecuador, que forman el meridiano astronómico de Greenwich y el plano meridiano que contiene a P.

Potencial de gravedad W . La tercera coordenada es el potencial de gravedad en el punto P y lo sitúa dentro del sistema de superficies de nivel.

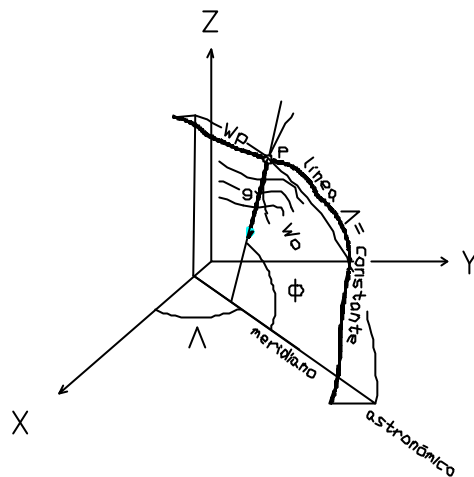


Fig. 3. 2. Sistema astronómico global.

Las coordenadas (F, L) se pueden determinar de forma absoluta mediante observaciones astronómicas². Estas coordenadas, definen además la dirección de la vertical astronómica ó física en el punto considerado. No es posible establecer una relación entre el sistema astronómico global y un sistema de coordenadas cartesianas geocéntricas asociado a él (eje Z coincidente con el eje de rotación terrestre) en ambos sentidos de forma directa. Es necesario un paso intermedio a través del potencial de gravedad. Es decir

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} \Rightarrow W = W(X, Y, Z) \Rightarrow \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Lambda_i \\ W_i \end{pmatrix}$$

La dependencia de las coordenadas astronómicas respecto al potencial gravitatorio se deduce a continuación.

$$\frac{dW}{dn} = \text{gra } dW = -gdn$$

siendo n un vector unitario en la dirección del vector gravedad y sentido contrario, dado por sus componentes

$$\begin{aligned} n_x &= \cos\Phi \cos\Lambda \\ n_y &= \cos\Phi \text{sen}\Lambda \\ n_z &= \text{sen}\Phi \end{aligned}$$

con $|n| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$. Por tanto se llega a

² *Geodesia y Cartografía Matemática*. F. Martín Asín. Capítulo 19. *Astronomía*. F. Martín Asín. Capítulos 32-35.

$$\operatorname{tg} \Phi = -\frac{W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}} \quad \Phi = \operatorname{arctg} -\frac{W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}} \quad \Lambda = \operatorname{arctg} \frac{W_y}{W_x}$$

Es decir, las coordenadas astronómicas son función de las primeras derivadas del potencial. Por ello, las líneas de los meridianos astronómicos ($\mathbf{L} = \text{constante}$) y de los paralelos astronómicos ($\mathbf{F} = \text{constante}$) son líneas en el espacio con doble curvatura y no pueden ser contenidas en un plano.

La tercera coordenada, el potencial gravitatorio W no puede determinarse de forma absoluta. Se determinan en su lugar, diferencias de potencial respecto a la superficie equipotencial de referencia, el geoide, mediante el empleo de nivelación y medidas de gravedad. Por ello, se suele emplear también la altitud ortométrica H (*altitud medida sobre la línea de la vertical desde el punto hasta el Geoide*), como tercera coordenada en el sistema astronómico global.

Como ya se ha dicho, las coordenadas astronómicas pueden obtenerse de forma absoluta a partir de observaciones astronómicas. La precisión que se obtiene para las mismas es del orden métrico (0", 1-0", 2). Las observaciones más precisas en geodesia se obtienen de forma relativa. El problema radica en que dichas observaciones relativas están inevitablemente referidas al sistema astronómico local. Es decir, por un lado disponemos de observaciones de tipo absoluto en el sistema astronómico global y, por otro, observaciones relativas, de mayor precisión, en múltiples sistemas astronómicos locales. Las funciones de transferencia entre un sistema astronómico local y el sistema astronómico global vienen dadas por³:

$$\begin{pmatrix} d\Phi \\ d\Lambda \\ dW \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} W_{yx} & W_{yy} & -W_{yz} \\ W_{xx} \cos\Phi & W_{xy} \cos\Phi & -W_{xz} \cos\Phi \\ 0 & 0 & -g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Es decir, que para transferir correctamente mediciones efectuadas en el sistema astronómico local al sistema astronómico global es necesario conocer las derivadas segundas del potencial gravitatorio. Es posible efectuar la medición de dichas cantidades mediante un instrumento denominado *balanza de torsión*, pero exigen unas cuidadosas y lentas observaciones adicionales, lo que unido a las complicadas fórmulas de transferencia, hace que sea necesario buscar sistemas más adecuados para el cálculo de coordenadas a partir de observaciones relativas.

3.1.3. Sistema elipsoidal.

Consiste en aproximar la figura matemática de la Tierra, el geoide, por un elipsoide de revolución.

³ *Geodesy*. Torge. La formulación que aparece en el libro ha sido modificada para adaptarse al sistema astronómico local tal y como se ha definido, es decir, con el eje y en dirección Norte.

Las superficies equipotenciales (superficies que tienen el mismo potencial en todos sus puntos) que transcurren completamente en el exterior de la superficie terrestre (prescindiendo de la masa atmosférica) presentan variaciones de curvaturas continuas, constituyendo superficies analíticas.

Ahora bien, el geoide como figura de la Tierra, transcurrirá por zonas con cambios bruscos de densidad. En éste caso las variaciones de curvatura de las superficies equipotenciales no es continua, presentando variaciones bruscas, coincidentes con los cambios bruscos de densidad de las masas atrayentes.

Aún así, el grado de aproximación con el geoide que puede obtenerse al adoptar un elipsoide de referencia es muy elevado, ya que las diferencias entre un elipsoide de referencia bien definido, con significado físico, y el geoide, no superan los 100 metros. Para ello se determinan su semieje mayor y su aplanamiento de forma que se cumpla, para el conjunto de puntos observados, que el sumatorio de los cuadrados de las ondulaciones del geoide sea mínimo

$$\sum_{i=1}^n N_i^2 = \text{mínimo}$$

Si se ha fijado uno de los dos parámetros geométricos del elipsoide (a ó f) la condición anterior equivale a hacer mínimo el sumatorio de los cuadrados de las componentes de la desviación de la vertical

$$\sum_{i=1}^n (\xi^2 + \eta^2) = \text{mínimo}$$

Una vez obtenidos los parámetros geométricos (a , f) es necesario asignarle una masa M y un velocidad de rotación ω para dotar al elipsoide de significado físico

Un punto P en este sistema queda definido por tres coordenadas:

Latitud geodésica \mathbf{j} es el ángulo, medido en el plano meridiano, que forman la normal al elipsoide en el punto P y el plano del ecuador. En el sistema elipsoidal el plano meridiano es el definido por la normal al elipsoide y el propio eje de rotación, ya que ambas rectas se cortan en el espacio, formando un plano.

Longitud geodésica \mathbf{l} es el ángulo, medido en el plano del ecuador, que forman el plano meridiano que contiene a P y el plano meridiano de Greenwich.

Altitud elipsoidal h es la distancia entre el punto P , medida a lo largo de la normal al elipsoide que pasa por dicho punto, y el elipsoide. Este tipo de altitud no tiene ningún significado físico, solamente carácter geométrico.

La mayor ventaja que presenta este sistema es que la geometría de su superficie es perfectamente regular y conocida, facilitando así cualquier tipo de cálculo.

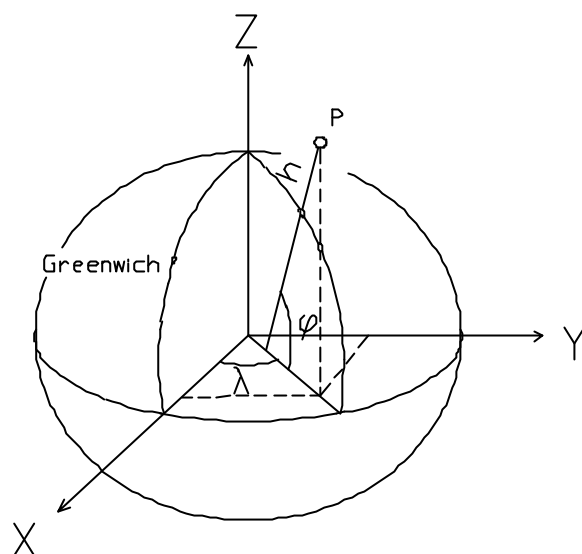


Fig. 3.1. Sistema de referencia elipsoidal

Por otra parte, al ser una superficie muy próxima al geoide, permite relacionar de forma sencilla las magnitudes absolutas medidas en el sistema astronómico global con las correspondientes magnitudes elipsoidales. Conociendo las desviaciones de la vertical y la ondulación del geoide la relación entre ambos tipos de coordenadas viene dada por

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \\ N &= h - H\end{aligned}$$

Al sistema elipsoidal es posible incorporarle unos ejes cartesianos geocéntricos.

Eje Z → coincidente con el eje de rotación y perpendicular al plano XY, plano del ecuador.

Eje X → Orientado en la dirección del meridiano de Greenwich.

Eje Y → En el plano del ecuador y perpendicular a los dos anteriores.

De esta forma un punto queda definido en un sistema elipsoidal bien por sus coordenadas geodésicas (\mathbf{j} , \mathbf{l} , h) o por sus equivalentes cartesianas (X, Y, Z), más aptas para describir las órbitas de los satélites artificiales, efectuar determinados cálculos de astrodinámica, etc.. La relación entre ambos tipos de coordenadas viene dada por

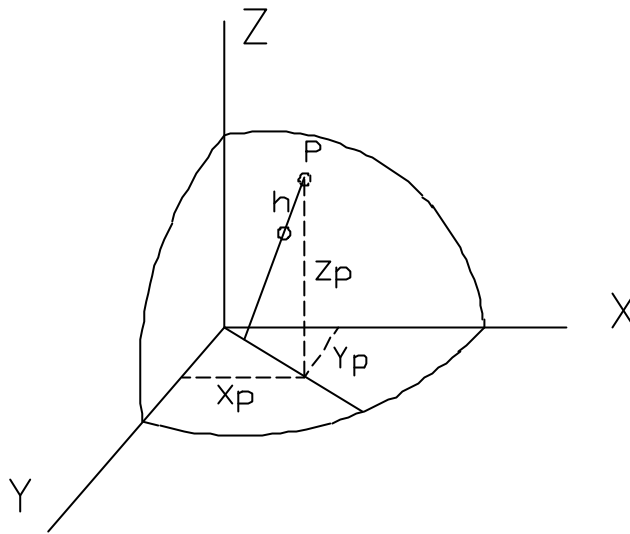


Fig. 3. 3. Sistema cartesiano geocéntrico.

$$\begin{aligned}
 X &= (N+h) \cos \varphi \cos \lambda & \varphi &= \arctg \frac{Z + e^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta} \\
 Y &= (N+h) \cos \varphi \sin \lambda & \lambda &= \arctg \frac{Y}{X} \\
 Z &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi & h &= \frac{p}{\cos \varphi} - N
 \end{aligned}$$

La relación recíproca viene dada por

siendo

$$\theta = \arctg \frac{Za}{pb} \qquad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \qquad p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Antiguamente, en España, se utilizaba un sistema elipsoidal definido por:

- Elipsoide de Struve
- Punto Fundamental en Madrid
- Longitudes referidas al meridiano de Madrid
- Altitudes referidas al geode, utilizando como Punto Fundamental el nivel medio del mar en Alicante

Posteriormente la red geodésica nacional fue compensada por el Army Map Service de U.S.A, sustentandose para ello en el sistema de referencia geodésico europeo de 1950 conocido como ED50 o RE50, definido por:

- Elipsoide internacional de Hayford

- Punto Fundamental en Postdam (torre de Helmert)
- Longitudes referidas al meridiano de Geenwich
- Altitudes referidas al geoide, utilizando como Punto Fundamental el nivel medio del mar en Alicante

3.1.4.Relación entre un sistema astronómico local y un sistema geodésico global

Para relacionar un sistema astronómico local y el sistema geodésico global es necesario efectuar dos rotaciones. La primera, alrededor del eje Z y con valor Λ , sitúa paralelos a los ejes X,Y y x,y de ambos sistemas. La matriz de rotación se muestra a continuación

$$R(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cos\Lambda & \text{sen } \Lambda & 0 \\ -\text{sen } \Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La segunda rotación, de valor $90-\Phi$ alrededor del eje Y situaría los tres ejes de ambos sistemas paralelos. La matriz de rotación en torno al eje Y se escribe

$$R(\Phi) = \begin{pmatrix} \text{sen}\Phi & 0 & -\cos\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\Phi & 0 & \text{sen}\Phi \end{pmatrix}$$

Aplicando sucesivamente ambas rotaciones al sistema cartesiano geocéntrico los ejes se situarían paralelos, y escribiendo la expresión de forma más ordenada

$$\begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{pmatrix} = R(\Phi, \Lambda) \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ -\text{sen}\Phi\cos\Lambda & -\text{sen}\Phi\text{sen}\Lambda & \cos\Phi \\ \cos\Phi\cos\Lambda & \cos\Phi\text{sen}\Lambda & \text{sen}\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{pmatrix}$$

La transformación inversa sería

$$\begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{pmatrix} = R^{-1}(\Phi, \Lambda) \begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{pmatrix} = R^T(\Phi, \Lambda) \begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{pmatrix}$$

Mediante las expresiones anteriores es posible transformar las observaciones efectuadas en un sistema astronómico local a incrementos de coordenadas cartesianas geocéntricas, que son las

observables que produce el GPS. En caso de desconocer la latitud y longitud astronómica es posible emplear en su lugar, sin gran pérdida de precisión, la latitud y la longitud geodésica.

Con las expresiones descritas también es posible transformar incrementos de coordenadas cartesianas geocéntricas, que como ya se ha dicho constituyen las observables GPS, en observables clásicas en el correspondiente sistema astronómico local. Sustituyendo en

$$\alpha_{ij} = \operatorname{arctg} \left(\frac{x_{ij}}{y_{ij}} \right) \quad \beta_{ij} = \arccos \left(\frac{z_{ij}}{D_{ij}} \right) \quad D_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2}$$

obtenemos

$$\alpha_{ij} = \operatorname{arctg} \left(\frac{-X_{ij} \operatorname{sen} \Lambda + Y_{ij} \operatorname{cos} \Lambda}{-X_{ij} \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} \Lambda - Y_{ij} \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \Lambda + Z_{ij} \operatorname{cos} \Phi} \right)$$

$$\beta_{ij} = \arccos \left(\frac{X_{ij} \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Lambda + Y_{ij} \operatorname{cos} \Phi \operatorname{sen} \Lambda + Z_{ij} \operatorname{sen} \Phi}{\sqrt{X_{ij}^2 + Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2}} \right)$$

$$D_{ij} = \sqrt{X_{ij}^2 + Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2}$$

Los subíndices indican que la observación está referida a los puntos i y j . En el caso de las coordenadas cartesianas supone el incremento entre ambos puntos.

La distancia geométrica, como puede comprobarse, es invariante. No depende del sistema de referencia empleado.

3.1.5. Movimiento libre del polo para un modelo de Tierra rígida

Se ha supuesto la Tierra como un elipsoide en rotación rígido, es decir, sin existencia de desplazamientos internos de masas. En un modelo así, el eje de simetría (sea F_0 su intersección con el elipsoide) coincide con el eje de rotación $\overset{v}{\omega}_R$ (sea W_0 la intersección de la recta que lo contiene y el elipsoide).

El momento angular $\overset{v}{N}$ de un cuerpo viene definido por⁴

$$\overset{v}{N} = C \overset{D}{\omega}$$

$\overset{v}{N}$ es el momento angular y caracteriza el estado de movimiento de rotación de la Tierra

⁴ *Sistemas de Referencia en Geodesia*, H. Moritz. Instituto de Astronomía y Geodesia. 1984. Pub. N° 135.
Rotación de la Tierra. H. Moritz. Instituto de Astronomía y Geodesia. 1984. Pub. N° 136.

$\vec{\omega}$ es el eje de rotación instantáneo

C tensor de inercia de la Tierra dependiente de la distribución de las masas. Está definido por una matriz de 3x3 simétrica con elementos diagonales dominantes.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Al ser C una matriz simétrica siempre es posible introducir unos ejes cartesianos respecto a los cuales adopte una forma diagonal

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I_0^p \vec{\omega}^p$$

A los ejes que cumplen dicha condición se los denomina *ejes principales de inercia* y constituyen los ejes de simetría o de la figura, luego, su intersección con el elipsoide sería F_0 . I_1, I_2, I_3 , constituyen los *momentos de inercia* respecto a los ejes principales.

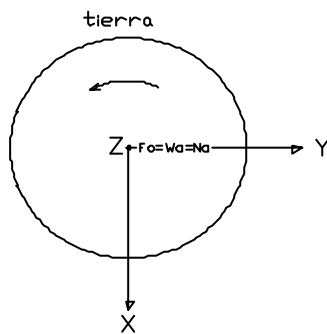


Fig. 3. 4. En el modelo de Tierra rígida sin traslación, todos los ejes coinciden.

En un cuerpo rígido y simétrico cuyo único movimiento fuese una rotación $\vec{\omega}_R$, ($\vec{w}_x = \vec{w}_y = 0$, \vec{w}_z) sobre sí mismo, alrededor del eje de simetría, los vectores \vec{N} y $\vec{\omega}_R$, tienen la misma dirección. Sea N_0 la intersección de la recta que contiene al eje del momento de inercia con el elipsoide. En el caso expuesto W_0 , F_0 , N_0 coincidirían y coincidirán a su vez con el polo instantáneo R_0 .

Pero, al existir el desplazamiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, se produce un efecto giroscópico. Existirán dos vectores de rotación. El que describe el movimiento de rotación de la Tierra sobre sí misma $\vec{\omega}_R$, y el debido a la rotación de la Tierra alrededor del Sol $\vec{\omega}_S$. El vector de rotación instantáneo en estos casos ha de cumplir la *ecuación de Euler*

$$C \vec{\omega} + \vec{\omega} \times C \vec{\omega} = 0$$

o, empleando los ejes principales de inercia $I_0^p \vec{\omega} + \vec{\omega} \times I_0^p \vec{\omega} = 0$

El vector $\vec{\omega}$, para solucionar dicha ecuación ha de cumplir unas determinadas condiciones

Es decir, que, las proyecciones del vector de rotación terrestre sobre el plano ecuatorial varían en función del tiempo, formando una circunferencia, mientras que la proyección sobre el eje Z

permanece constante. Por tanto, el eje de rotación instantáneo R_0 describe un cono alrededor del eje Z , con vértice en el centro de masas, amplitud b y periodo

$$p = 2\pi \frac{I_1}{(I_3 - I_1)\omega_3}.$$

El periodo, calculado a partir de la determinación de I_1 , I_2 , I_3 , para una Tierra rígida se conoce como periodo de Euler y es de 305 días. La amplitud b supone aproximadamente unos 6 m.

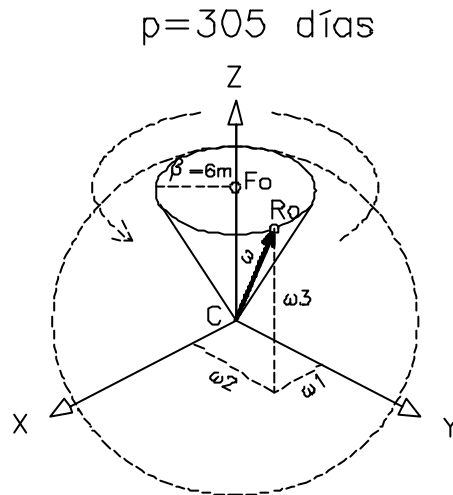


Fig. 3. 5. Movimiento teórico del Polo debido a la acción conjunta rotación - traslación.

Es decir, el eje instantáneo de rotación R_0 , que coincidirá con el eje del momento angular N_0 , experimenta un movimiento circular de aproximadamente 6 m. de radio y periodo casi anual respecto al eje de simetría de la figura F_0 , que coincidirá a su vez con el eje de rotación terrestre inicial W_0 .

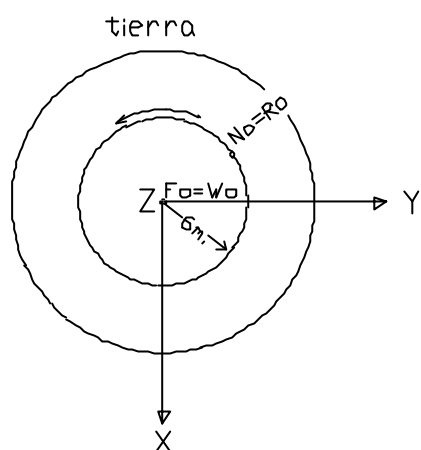


Fig. 3. 6. El eje instantáneo de rotación describe una circunferencia alrededor del eje de simetría.

Este fenómeno, conocido como *movimiento libre del polo*, hace que la precisión relativa de los sistemas de referencia elipsoidales con Tierra rígida sea de 10^{-6} .

$$\frac{6 \text{ m}}{6.370.000 \text{ m}} \approx 10^{-6} = 1 \text{ p.p.m.}$$

Un sistema de referencia de tales características pudo ser empleado hasta comienzos de los años 70, ya que hasta ese momento no se habían podido efectuar mediciones geodésicas con precisión relativa superior a 10^{-6} . Su materialización consistía en una serie de puntos convenientemente monumentados sobre la superficie terrestre y dotados de coordenadas.

Una vez que el instrumental y la metodología permitieron mayores precisiones fue necesario la definición de nuevos sistemas de referencia, más precisos y fáciles de relacionar con el sistema de referencia espacial.

3.2. SISTEMA DE REFERENCIA TERRESTRE CONVENCIONAL (CTRS).

3.2.1. Exigencias de precisión en un sistema de referencia geodésico.

El sistema de referencia elipsoidal con modelo de Tierra rígida puede considerarse válido para una precisión de hasta 10^{-6} . Podrá ser utilizado, por tanto siempre que efectuemos mediciones con una precisión relativa igual o menor.

Hasta los años 60 las operaciones geodésicas se reducían a las siguientes⁵:

Catastro y Cartografía	10^{-4}	10 cm. / Km.
------------------------	-----------	--------------

⁵*Sistemas de Referencia en Geodesia*, H. Moritz. Instituto de Astronomía y Geodesia. 1984. Pub. N° 135.

Triangulaciones	10^{-5}	1 cm. / Km.
Medidas de Bases	10^{-6}	1 mm. / Km.
Triangulaciones Doppler	10^{-6}	1 mm. / Km.

Para todo este tipo de medidas, el sistema de referencia con modelo de Tierra rígida era completamente válido. Pero a partir de los años 70, los avances tecnológicos y científicos permitieron realizar medidas de mayor precisión:

Distancias Láser a Satélites (SLR)	10^{-8}	0.01 mm. / Km.
VLBI	10^{-8}	0.01 mm. / Km.
Medidas absolutas de gravedad	10^{-8} - 10^{-9}	

Estos sistemas de medición podrían calificarse como científicos, al estar solamente al alcance de unos pocos organismos e instituciones. Lo que resulta evidente, es que en los años 70 la comunidad científica y el desarrollo tecnológico espacial exigían ya sistemas de referencia con una precisión muy superior a la parte por millón de los sistemas clásicos. Para ello, es necesario establecer sistemas de referencia terrestres con un modelo de Tierra elástica o deformable.

En los años 90, efectuar mediciones a grandes distancias con precisión mejor que 10^{-6} se ha convertido, no en una labor de carácter científico, sino al alcance de técnicos cualificados, gracias a la incorporación de receptores del GPS en el parque instrumental habitual de las empresas del sector cartográfico.

3.2.2. Movimiento del polo con modelo de Tierra deformable.

Considerar un modelo de Tierra elástico o deformable supone tener en cuenta la variación en el tiempo de la distribución de masas. Los coeficientes del tensor de inercia, en este caso, variarán en el tiempo y como

$$\dot{N} = C\dot{\omega}$$

las direcciones del vector eje del momento cinético y del vector eje instantáneo de rotación, aunque próximas, no coincidirán exactamente, dando lugar a dos polos diferenciados: N_0 y R_0 . Tampoco se cumple exactamente el periodo de Euler (305 días) dando lugar al periodo Chandler, de aproximadamente 430 días y una amplitud variable, siempre menor de 10 metros.

Superpuesto al movimiento libre del polo, se produce el *movimiento forzado*. El origen de éste es la atracción gravitatoria del Sol y de la Luna. Tiene un periodo diurno y una amplitud de unos 60 cm. para los ejes de rotación y del momento cinético y de unos 60 m. para el eje principales de inercia.

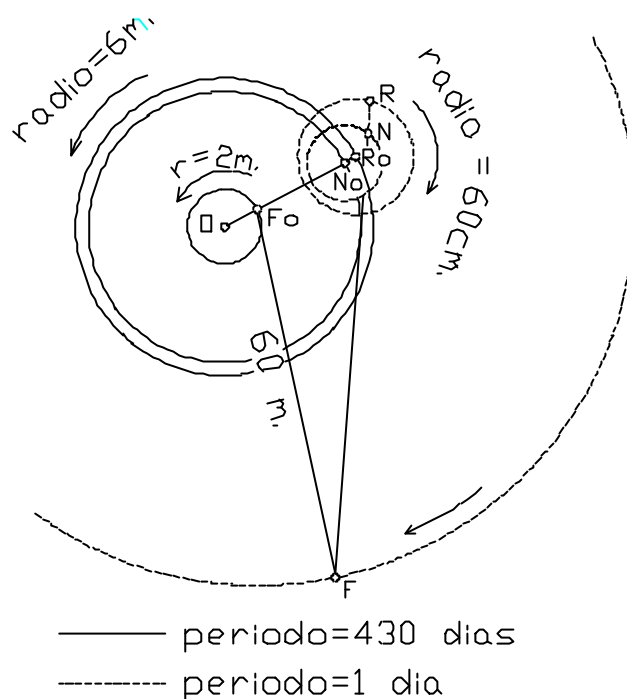


Fig. 3. 7. Movimiento del Polo con modelo de tierra deformable.

A estos efectos ha de añadirseles el debido a las mareas terrestres, también de unos 60 cm. y los movimientos de las placas tectónicas, que pueden suponer desplazamientos de hasta 10 cm. al año.

3.2.3. Definición de sistema de referencia terrestre convencional (CTRS).

Una vez descritos los desplazamientos del eje de rotación respecto al cuerpo terrestre la cuestión es cómo definir un eje Z para fines geodésicos. El eje principal de inercia o eje de la figura F queda descartado ya que experimenta variaciones diarias de 60 m, lo que supondría que las coordenadas de los puntos se desplazarían diariamente ésta cantidad en coordenadas absolutas.

El eje N_0 tiene la ventaja de que su movimiento respecto al espacio se puede calcular a partir de las distribuciones de masas y la mecánica celeste. Por ello fue adoptado en 1979 como polo celeste de efemérides CEP (Celestial Ephemeris Pole). Representa el polo instantáneo o verdadero y junto al geocentro, define el ecuador verdadero. Las observaciones astronómicas realizadas en un determinado instante, están referidas, por tanto, al polo CEP. El inconveniente, para ser utilizado en geodesia terrestre, es que sufre desplazamientos variables de hasta 6 m. a lo largo del año respecto a la corteza terrestre. Parece lógico pensar que un sistema de referencia geodésico deba mantenerse estable respecto a la superficie terrestre.

Por ello, se adoptó por convenio un polo medio. Para definirlo se adoptó el eje medio de rotación correspondiente al centro del movimiento libre del polo entre los años 1900.0 y 1906.0 . Dicho polo convencional se denominó CIO (Conventional International Origin). En la actualidad se denomina CTP (Conventional Terrestrial Pole).

Se define el sistema de referencia terrestre convencional (CTRS) como un sistema cartesiano de tres ejes (X,Y,Z) fijo a la Tierra. El origen coincide con el centro de masas terrestre o geocentro. El eje Z coincide con el eje de rotación definido por el CTP. El eje X, perpendicular al anterior, en la dirección del meridiano medio de Greenwich y el eje Y, contenido en el plano ecuatorial medio y perpendicular a los dos ejes anteriores, formando un sistema de mano derecha. Las coordenadas de un punto se expresan mediante tres coordenadas X,Y,Z.

Al CTRS se le suele asociar un elipsoide de referencia. En la actualidad, entre los más empleados en España se encuentran el elipsoide de Hayford y el asociado al WGS-84. Sus parámetros geométricos se muestran a continuación

ELIPSOIDE	Semieje mayor	Aplanamiento
Hayford	6.378.388.000	1:297.0000000
WGS-84	6.378.137.000	1:298.2572221

Así definido, el CTRS equivaldría a un sistema elipsoidal con modelo de Tierra rígida. La diferencia estriba en que el movimiento del CTP respecto al CEP es conocido. Es decir, que en cualquier momento se pueden relacionar las coordenadas obtenidas en una determinada época con las de otra.

El movimiento del CTP respecto al CEP lo obtiene el International Earth Rotation Service (IERS) a partir del seguimiento de la variación de las coordenadas a lo largo del tiempo de una serie de estaciones permanentes. En la actualidad, se emplean métodos espaciales como el VLBI (Very Long Base Interferometry) , LLR (Lunar Laser Ranging), SLR (Satélite Laser Ranging), GPS ... La precisión de las determinaciones es de $\pm 0''.002$ (equivalen en longitud de arco a ± 6 cm.), $\pm 0,2$ ms. en la rotación terrestre y ± 10 cm. para las coordenadas cartesianas geocéntricas de las estaciones permanentes de observación⁶ . A partir de las mencionadas observaciones, el IERS determina las rotaciones diferenciales x_p , y_p que permiten relacionar las coordenadas CEP con las coordenadas CTP. Conocida la posición del polo CTP respecto al polo CEP, se plantea la transformación de coordenadas entre ambos sistemas

⁶ *Geodesy*, Torge

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CEP-Gr} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CTP} \quad \text{siendo } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{pmatrix}$$

Es posible decir, por tanto, que para materializar el CTRS son necesarios una serie de estaciones de observación permanente repartidas por toda la Tierra, cuyas coordenadas respecto al espacio son periódicamente determinadas con una precisión absoluta mejor que 10 cm. y cuya relación con puntos materializados sobre la superficie terrestre es perfectamente conocida.

3.2.4. IERS Terrestrial Reference Frame (ITRF).

El ITRF es el marco de referencia más preciso utilizado hoy en día. Fue establecido por el IERS (International Earth Rotation Service) y constituye el marco de referencia del ITRS (International Earth Reference System) .

El ITRS queda definido por:

- como origen toma el geocentro o centro de masa de la Tierra, incluyendo océanos y atmósfera.
- La escala ligada a la unidad de medida en el sistema internacional, el metro.
- La orientación de los ejes fue acordada por el BIH en la época 1984.0 o instante de comienzo del año Juliano en 1984.
- su evolución en orientación con el tiempo no crea rotación global residual con relación a la corteza

La constitución del ITRF corresponde a un conjunto de estaciones de las cuales conocemos sus coordenadas y su variación respecto al tiempo, a las cuales se les denomina *Set of Station Coordinates* (SSC). Para ello se emplean técnicas como:

- VLBI (Very Long Baseline Interferometry)
- SLR (Satelite Laser Ranging)
- LLR (Lunar Laser Ranging)
- GPS
- DORIS (Doppler Orbitography and Radio-positoning Integrated by Satellite)

El IERS publica cada año las soluciones de estas observaciones, determinandose cada año un ITRF al que se le asignan dos dígitos identificativos. Por ejemplo, para el año 1994 tendremos el ITRF94. La primera solución publicada fue en 1988 y se conoce por ITRF88

El procedimiento de cálculo de las coordenadas en un determinado ITRF es el siguiente:

- reducción de los SSC a una época de referencia común t_0 , utilizando cada estación sus respectivos modelos de velocidad en el movimiento de placas.

- estimación mínimo-cuadrática en la época, de las coordenadas de las estaciones ITRF.
- transformación de siete parámetros desde cada SSC individual al sistema ITRF.

Para establecer el Datum de un ITRF determinado se necesitan 4 parámetros:

- orientación
- origen
- escala
- variaciones con el tiempo

Parámetros que variarán de unos a otros dependiendo de la precisión de los datos obtenidos o de las técnicas empleadas para la obtención de los mismos. La transformación de las coordenadas de un ITRF_{xx} a otro ITRF_{yy} se efectúa por medio de matrices de transformación. En 1990, la subcomisión EUREF de la IAG decidieron que las coordenadas ITRF89 de las 36 estaciones europeas IERS definieran el Marco de Referencia Terrestre Europeo (ETRF89). Para densificar esta red se tomaron 71 estaciones adicionales distribuidas por toda Europa.

3.3. SISTEMAS DE REFERENCIA ESPACIALES.

Empleando los sistemas de referencia terrestres, las coordenadas de un objeto fijo en el espacio variarían constantemente debido a la rotación terrestre. Tampoco son los más adecuados para efectuar cálculos de astrodinámica al no ser sistemas inerciales. Por todo ello, para definir la situación de las estrellas que, en primera aproximación, pueden considerarse fijas debido a su lejanía, así como otra serie de objetos espaciales con movimiento independiente de la Tierra, se definen los sistemas espaciales.

3.3.1. Coordenadas ecuatoriales absolutas.

Tradicionalmente la situación de las estrellas respecto a la Tierra se ha definido mediante coordenadas ecuatoriales absolutas. Estas coordenadas emplean como plano fundamental el ecuador celeste o plano que conteniendo al geocentro es perpendicular al CEP (eje de rotación instantáneo). Sus coordenadas son

Ascensión recta α ángulo, medido en sentido directo a lo largo del ecuador celeste, entre la dirección del punto γ (Aries) y el meridiano del objeto celeste.

Declinación δ ángulo que va desde el ecuador celeste hasta el objeto considerado, medido en el meridiano celeste de éste último.

La dirección del punto γ queda definida por la intersección del plano ecuatorial celeste y el plano de la eclíptica.

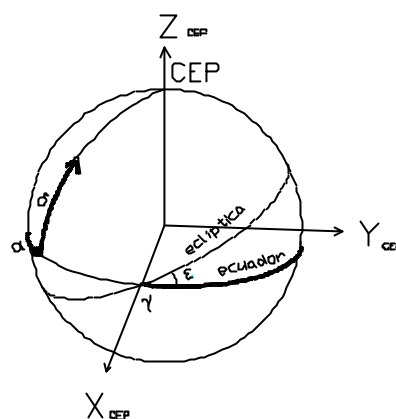


Fig. 3. 8. Sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas.

Este tipo de coordenadas, que definen la situación de un punto mediante dos valores angulares, es muy apropiado para describir objetos muy alejados de la Tierra. Para objetos más cercanos, como los satélites artificiales, es más conveniente para la determinación de órbitas, introducir un sistema cartesiano geocéntrico asociado al CEP.

Las coordenadas ecuatoriales absolutas y las definidas por un triedro de coordenadas cartesianas geocéntricas cuyo eje Z coincida con el CEP y cuyo eje X coincida con el punto γ , quedan perfectamente relacionadas mediante

$$\begin{aligned} X &= r \cos \delta \cos \alpha & r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ Y &= r \cos \delta \sin \alpha & \alpha &= \arctg \frac{Y}{X} \\ Z &= r \sin \delta & \delta &= \arctg \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \end{aligned}$$

Las coordenadas cartesianas geocéntricas asociadas al CEP y al punto Aries pueden ser relacionadas con el CTRS, cuyo polo queda definido por el CTP. Es necesario el conocimiento de tres parámetros: las dos rotaciones diferenciales x_p , y_p periódicamente obtenidas y publicadas por el International Earth Rotation Service (IERS) y la hora sidérea aparente en Greenwich GAST (Greenwich Apparent Sidereal Time). Conocidos estos parámetros la transformación se expresan

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CTP} = \begin{pmatrix} \cos(GAST) & \sin(GAST) & x_p \\ -\sin(GAST) & \cos(GAST) & -y_p \\ -x_p \cos(GAST) - y_p \sin(GAST) & -x_p \sin(GAST) + y_p \cos(GAST) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CEP-\gamma}$$

Una transformación, equivalente a la anterior, relaciona las coordenadas cartesianas geocéntricas CEP referidas al punto Aries y las coordenadas cartesianas geocéntricas CEP referidas al meridiano de Greenwich

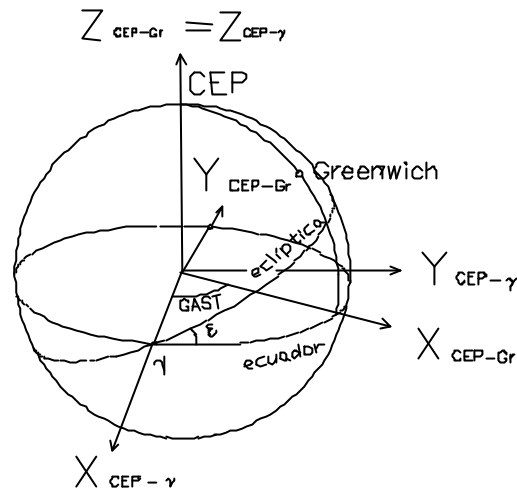


Fig. 3. 9. Relación entre sistemas cartesianos definidos por el polo CEP.

3.3.2. Coordenadas eclípticas.

Las coordenadas ecuatoriales absolutas, dadas por la ascensión recta y la declinación o por las coordenadas cartesianas geocéntricas asociadas al CEP, presentan un inconveniente para la definición de la situación de objetos celestes, el movimiento del CEP respecto al espacio, conocido como precesión y nutación.

La precesión es un fenómeno que tiene lugar debido a la diferente atracción que el Sol ejerce en los centros de masas de los hemisferios del elipsoide terrestres. Esto produce un par de fuerzas sobre el eje del momento de inercia, que tiende a elevarse. Este efecto hace que el eje de rotación instantáneo describa un cono con vértice en el geocentro, de periodo aproximado de 26000 años y 47° de ángulo.

El efecto similar, producido por la atracción de lunar, recibe el nombre de nutación. La nutación se superpone a la precesión. Tiene un periodo de 18,6 años y supone una inclinación de $18''42$ para el eje instantáneo de rotación. El resultado conjunto se muestra gráficamente a continuación.

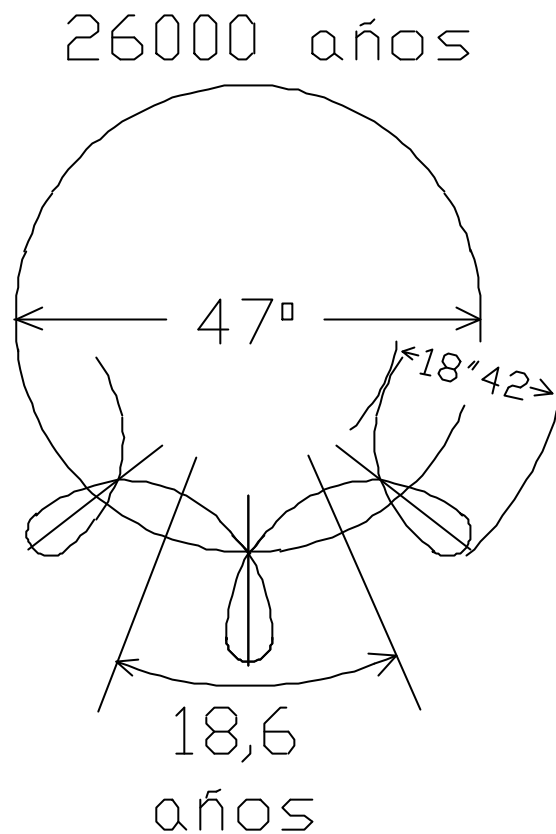


Fig. 3. 10. Precesión y nutación.

Debido a la variación que experimenta el polo CEP en el espacio es necesario definir el sistema de referencia eclíptico. El plano fundamental en éste sistema lo constituye la eclíptica o plano orbital de la Tierra respecto al Sol. El plano de la eclíptica es perpendicular al polo NEP (North Ephemeris Pole) o polo de la eclíptica. Considerando una esfera geocéntrica de radio unidad, la situación de un objeto espacial vendría dado por sus coordenadas eclípticas

Longitud eclíptica l . Ángulo medido en el plano de la eclíptica entre el punto γ y el plano del círculo máximo que pasando por el objeto considerado contiene al NEP.

Latitud eclíptica b . Ángulo medido a lo largo del círculo máximo que contiene al objeto considerado y al NEP y que va desde el plano de la eclíptica hasta el objeto.

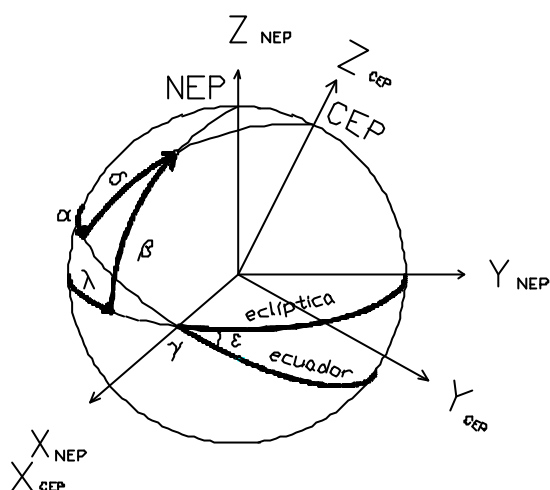


Fig. 3. 11. Coordenadas eclípticas.

$$X = r \cos\beta \cos\lambda$$

$$Y = r \cos\beta \sin\lambda$$

$$Z = r \sin\beta$$

y la relación recíproca $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

$$\lambda = \arctg \frac{Y}{X}$$

$$\beta = \arctg \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

Éste tipo de coordenadas son las más convenientes para definir la posición de las estrellas respecto a la Tierra. Este sistema de coordenadas asociado a la Tierra se conoce como CIS (Conventional Inertial System).

A efectos de situar en él satélites artificiales, se le puede asociar a un sistema de coordenadas cartesianas geocéntricas con el eje Z en dirección del NEP, el eje X en dirección del punto γ y eje Y perpendicular a ambos. La relación entre las coordenadas eclípticas y las cartesianas asociadas es

La relación precisa entre las coordenadas ecuatoriales absolutas y las coordenadas eclípticas es posible establecerla mediante cálculos de mecánica celeste desarrollados a partir de la 1980 IAU *Theory of Nutation*. Para ello es necesario conocer los parámetros de la precesión ζ , z , θ , la oblicuidad ϵ , y los parámetros de la nutación $\Delta\epsilon$, $\Delta\psi$. La transformación viene dada por

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{NEP} = NP \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CEP}$$

$$JD = 367 \times AÑO - 7 \times [AÑO + (MES + 9) / 12] / 4 + 275 \times MES / 9 + DIA + 1721014$$

En resumen, la relación entre el CTRS y el CIS vendría dada por la transformación

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{NEP} = NPGM \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CTP}$$

El CIS en realidad no constituye un sistema inercial, debido a las aceleraciones que experimenta la Tierra. Por ello, en ciertas aplicaciones es más conveniente establecer un sistema de coordenadas heliocéntrico.

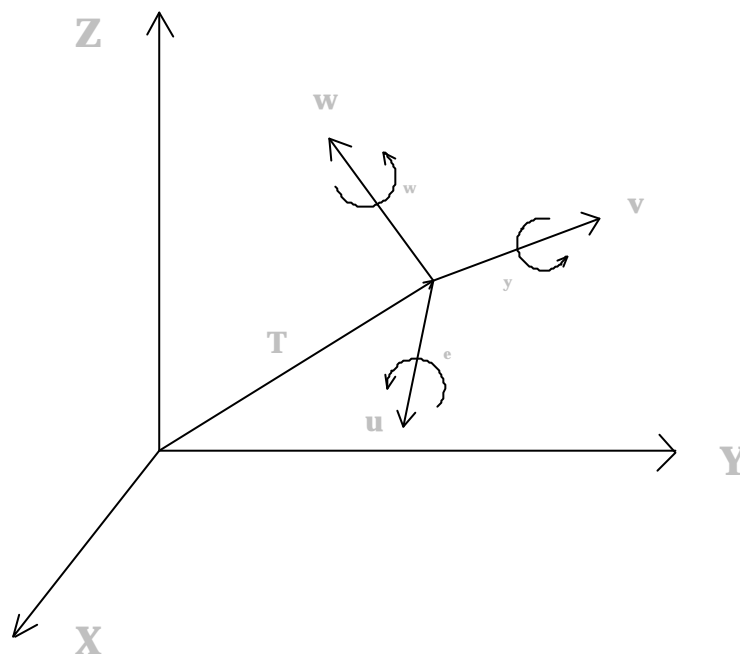
Un sistema de coordenadas eclípticas heliocéntricas, es decir, con centro en el Sol, constituye un sistema casi inercial, ya que únicamente está afectado por la precesión planetaria.

3.4. TRANSFORMACIÓN ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA.

Hay distintos sistemas de transformación entre Sistemas de referencia, los hay que utilizan Modelos de siete parámetros y modelos de cuatro parámetros.

Modelo Bursa-Wolf

Sea $X(X,Y,Z)$ un sistema cartesiano asociado al sistema de referencia geodésico global. Sea $U(u,v,w)$ el sistema cartesiano asociado al sistema de referencia geodésico local, cuyo centro está trasladado respecto al sistema global y cuyos ejes presentan unos giros diferenciales ω (respecto al eje w), ϵ (respecto al eje u), ψ (respecto al eje v).



La transformación entre ambos sistemas puede escribirse como

$$X = T + (1 + \Delta)RU$$

siendo $T = (T_x, T_y, T_z)^T$ el vector de translaciones

Δ el factor de escala

R la matriz de rotación

$$R = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \psi & \cos \omega \sin \psi \sin \epsilon + \sin \omega \cos \epsilon & -\cos \omega \sin \psi \cos \epsilon + \sin \omega \sin \epsilon \\ -\sin \omega \cos \psi & -\sin \omega \sin \psi \sin \epsilon + \cos \omega \cos \epsilon & -\sin \omega \sin \psi \cos \epsilon + \cos \omega \sin \epsilon \\ \sin \psi & -\cos \psi \sin \epsilon & \cos \psi \cos \epsilon \end{bmatrix}$$

Al ser las rotaciones entre sistemas de referencia muy pequeñas, podemos aproximar el seno por el arco, el coseno por la unidad y despreciar los productos entre ángulos por ser de un segundo orden de pequeñez. La matriz R quedaría

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{w} & -\mathbf{y} \\ -\mathbf{w} & 1 & \mathbf{e} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{e} & 1 \end{bmatrix}$$

que puede descomponerse en suma de dos matrices

$$R = I + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w} & -\mathbf{y} \\ -\mathbf{w} & 0 & \mathbf{e} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{e} & 0 \end{bmatrix}$$

expresión lineal que puede escribirse

$$T + \Delta U + QU + (U - X) = 0$$

Cada punto de coordenadas conocidas en ambos sistemas permite plantear tres ecuaciones. El sistema matricial anterior, escrito para un punto en forma de sistema de ecuaciones lineales quedaría.

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w} & -\mathbf{y} \\ -\mathbf{w} & 0 & \mathbf{e} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 - X_1 \\ v_1 - Y_1 \\ w_1 - Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Tres puntos permiten formar un sistema nueve ecuaciones que puede ser resuelto aplicando el algoritmo de mínimos cuadrados. El sistema, para n puntos adoptaría la forma

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & -w_1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & v_1 & -u_1 & 0 & w_1 \\
0 & 0 & 1 & w_1 & 0 & u_1 & -v_1 \\
1 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & -w_2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & v_2 & -u_2 & 0 & w_2 \\
0 & 0 & 1 & w_2 & 0 & u_2 & -v_2 \\
\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\
1 & 0 & 0 & u_n & v_n & -w_n & 0 \\
0 & 1 & 0 & v_n & -u_n & 0 & w_n \\
0 & 0 & 1 & w_n & 0 & u_n & -v_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_X \\
T_Y \\
T_Z \\
\Delta \\
\mathbf{w} \\
\mathbf{y} \\
\mathbf{e}
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
X_1 - u_1 \\
Y_1 - v_1 \\
Z_1 - w_1 \\
X_2 - u_2 \\
Y_2 - v_2 \\
Z_2 - w_2 \\
\Lambda \\
X_n - u_n \\
Y_n - v_n \\
Z_n - w_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
r_1 \\
r_2 \\
r_3 \\
r_4 \\
r_5 \\
r_6 \\
\Lambda \\
r_{3n-2} \\
r_{3n-1} \\
r_{3n}
\end{bmatrix}$$

El principal inconveniente de éste modelo es que si los puntos empleados en la transformación no están bien distribuidos geoméricamente o están próximos entre sí con relación a las dimensiones de la Tierra, al ser el centro de giro el geocentro, se pueden producir transformaciones de baja precisión. Este caso se da habitualmente cuando se efectúan transformaciones de carácter local.

Modelo Badekas-Molodenskii

En el modelo Badekas-Molodenskii las rotaciones se determinan a partir del baricentro de la zona definida por las coordenadas en el sistema geodésico local de los puntos. De ésta forma se consigue mejorar la precisión en transformaciones que empleen puntos próximos entre sí.

El modelo de transformación se escribe

$$T + \Delta(U - U_0) + Q(U - U_0) - (X - U) = 0$$

Cada punto de coordenadas conocidas en ambos sistemas permite plantear tres ecuaciones. El sistema matricial anterior, escrito para un punto en forma de sistema de ecuaciones lineales quedaría.

$$\begin{bmatrix}
T_X \\
T_Y \\
T_Z
\end{bmatrix}
+ \Delta
\begin{bmatrix}
u_1 - u_0 \\
v_1 - v_0 \\
w_1 - w_0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & \mathbf{w} & -\mathbf{y} \\
-\mathbf{w} & 0 & \mathbf{e} \\
\mathbf{y} & -\mathbf{e} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 - u_0 \\
v_1 - v_0 \\
w_1 - w_0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
u_1 - X_1 \\
v_1 - Y_1 \\
w_1 - Z_1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
r_1 \\
r_2 \\
r_3
\end{bmatrix}$$

Tres puntos permiten formar un sistema nueve ecuaciones que puede ser resuelto aplicando el algoritmo de mínimos cuadrados. El sistema, para n puntos adoptaría la forma

sencilla e intuitiva. Es decir, directamente es posible evaluar el giro en acimut entre ambos elipsoides, así como la inclinación existente entre ambas superficies.

Por tanto, la matriz Q empleada en los modelos anteriores se sustituye por la suma de matrices $\alpha M_\alpha + \xi M_\xi + \eta M_\eta$. Convenientemente desarrollado y agrupado el modelo queda

$$A \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ \Delta \\ \alpha \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_i - u_i \\ Y_i - v_i \\ Z_i - w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (u_i - u_0) & (v_i - v_0) \text{sen} \phi_0 - (w_i - w_0) \text{cos} \phi_0 \text{sen} \lambda_0 & -(w_i - w_0) \text{cos} \lambda_0 & -(v_i - v_0) \text{cos} \phi_0 - (w_i - w_0) \text{sen} \phi_0 \text{sen} \lambda_0 \\ 0 & 1 & 0 & (v_i - v_0) & -(u_i - u_0) \text{sen} \phi_0 + (w_i - w_0) \text{cos} \phi_0 \text{cos} \lambda_0 & -(w_i - w_0) \text{sen} \lambda_0 & (u_i - u_0) \text{cos} \phi_0 + (w_i - w_0) \text{cos} \phi_0 \text{cos} \lambda_0 \\ 0 & 0 & 1 & (w_i - w_0) & (u_i - u_0) \text{cos} \phi_0 \text{sen} \lambda_0 - (v_i - v_0) \text{cos} \phi_0 \text{cos} \lambda_0 & (u_i - u_0) \text{cos} \lambda_0 + (v_i - v_0) \text{sen} \lambda_0 & (u_i - u_0) \text{sen} \phi_0 - (v_i - v_0) \text{sen} \phi_0 \text{cos} \lambda_0 \end{bmatrix}$$

3.4.2. Modelos de cuatro parámetros.

El producto de las observaciones GPS es un incremento de coordenadas cartesianas geocéntricas. Por esta razón, siempre han de estar asociadas a algún punto de coordenadas conocidas en un sistema de referencia geodésico, generalmente local. Es posible, por tanto, prescindir de las translaciones que aparecían en los modelos de transformación de siete parámetros.

De ésta forma, se pueden emplear modelos de cuatro parámetros: tres giros y un factor de escala. Estos valores, una vez obtenidos y aplicados a todos los vectores observados, permiten disponer de vectores definidos por incrementos de coordenadas cartesianas geocéntricas en el sistema geodésico local.

Éste tipo de transformación es el que se suele aplicar en los trabajos habituales con GPS

Para la deducción de las expresiones de transformación se parte del modelo Bursa-Wolf

$$X = T + (1 + \Delta)RU$$

que particularizado para el punto i resulta

$$T - (1 + \Delta)RU_i - X_i = 0$$

y para un punto j

$$T - (1 + \Delta)RU_j - X_j = 0$$

y restando la primera de la segunda

$$(1+\Delta)R(U_j - U_i) - (X_j - X_i) = 0$$

Al ser los giros de pequeña magnitud, se puede hacer $R = I + Q$, como en los apartados anteriores.

despreciando términos de segundo orden queda

$$\Delta(U_j - U_i) + Q(U_j - U_i) - [(X_j - X_i) - (U_j - U_i)] = 0$$

que escrito de forma explícita para un vector dado en ambos sistemas por sus incrementos de coordenadas cartesianas geocéntricas

$$\Delta \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \\ w_j - w_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega & -\psi \\ -\omega & 0 & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \\ w_j - w_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (X_j - X_i) - (u_j - u_i) \\ (Y_j - Y_i) - (v_j - v_i) \\ (Z_j - Z_i) - (w_j - w_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

sistema fácilmente ampliable a n vectores.

$$\begin{bmatrix} u_j - u_i & v_j - v_i & -(w_j - w_i) & 0 \\ v_j - v_i & -(u_j - u_i) & 0 & w_j - w_i \\ w_j - w_i & 0 & u_j - u_i & -(v_j - v_i) \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ u_k - u_l & v_k - v_l & w_k - w_l & 0 \\ v_k - v_l & -(u_k - u_l) & 0 & w_k - w_l \\ w_k - w_l & 0 & u_k - u_l & -(v_k - v_l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (X_j - X_i) - (u_j - u_i) \\ (Y_j - Y_i) - (v_j - v_i) \\ (Z_j - Z_i) - (w_j - w_i) \\ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \\ (X_k - X_l) - (u_k - u_l) \\ (Y_k - Y_l) - (v_k - v_l) \\ (Z_k - Z_l) - (w_k - w_l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \Lambda \\ r_{3n-2} \\ r_{3n-1} \\ r_{3n} \end{bmatrix}$$

En este caso, dos vectores no alineados permiten determinar los parámetros de transformación con dos grados de libertad.

Un modelo similar se obtendría partiendo de las expresiones correspondientes a la transformación Badekas-Molodenskii. Otra variante sería expresar los giros en el sistema topocéntrico local, de forma análoga al modelo de Veis para siete parámetros.

Conclusiones:

Los Sistemas de Referencia no son invariantes puesto que se aplican a la Tierra, que es un sólido no rígido, que tiene o presenta variaciones en su centro de gravedad, en su polo, en su velocidad de rotación, incluso en su conformación interna y externa. (Mareas, Volcanes, Placas Tectónicas, incluso vientos (el aire recordemos tiene masa) etc. Además están las atracciones externas (Sol, Luna, Planetas, etc).

Las coordenadas en estos Sistemas son distintas para un mismo punto, incluso para un mismo Sistema en distintas fechas.

Las coordenadas dentro de un mismo sistema son únicas e invariantes para un mismo punto, luego la referencia es única para cada parcela dentro de un mismo sistema de referencia. Las coordenadas se pueden replantear en cualquier momento a partir de los vértices Geodésicos.

Los Sistemas de Coordenadas utilizados en Catastro son Sistemas no Inerciales, de inferior precisión que los Inerciales.

Los distintos países, por acuerdo, pueden en un determinado momento definir un Sistema de Referencia más preciso Inercial. Ejemplo: WGS-84 por necesidades en la navegación marítima y aérea.

Se pueden transformar las coordenadas de un Sistema de Referencia a otro mediante los modelos de transformación vistos.

La referencia catastral, por tanto, variaría de un sistema de referencia a otro, o en un mismo sistema si es inercial.

Recordemos que casi todos los trabajos topográficos de implantación de Redes Básicas Catastrales y apoyo fotogramétrico, hoy en día se hacen por G.P.S., que utiliza como Sistema de Referencia principal el WGS-84 y que luego se transforma por mínimos cuadrados a ED-50.

Lo lógico es fijar la referencia siguiendo la norma definida por la Dirección General de Catastro, en función del Sistema de Referencia vigente, pero una vez impuesta, es como el D.N.I. de una persona, ya no se debe variar puesto la identifica ante la Administración y ante los demás.

Se pueden haber emitido certificaciones catastrales e incluso se pueden haber inscrito las propiedades en el Registro de la Propiedad, con la inclusión de esta referencia catastral, y si se cambiara, acarrearía problemas a los interesados.

Lo que sí tiene que evitarse, es la duplicidad de referencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HEISKANEN-MORITZ, Geodesia Física. Instituto Geográfico Nacional. Instituto de Astronomía y Geodesia. 1985

HOFFMAN , LICHTENEGGER, COLLINS. G.P.S. Theory and Practice. Springer-Verlag Wien - New York. 1992.

LEICK, ALFRED. G.P.S. Satellite Surveying. John Wiley & Sons, Inc. 1995.

MARTIN ASIN, F. Geodesia y Cartografía Matemática. Paraninfo.

H. MORITZ. Sistemas de Referencia en Geodesia. Instituto de Astronomía y Geodesia. 1984. Pub. N° 135.

H. MORITZ. Rotación de la Tierra. Instituto de Astronomía y Geodesia. 1984. Pub. N° 136.

NUÑEZ-GARCÍA, VALBUENA, VELASCO. G.P.S. La Nueva era de la Topografía. Ediciones de las Ciencias Sociales, S.A. 1992

SEEBER, GÜNTER. Satellite Geodesy. Walter de Gruyter - Berlin - New York. 1993.

TORGE, W. Geodesy. Second Edition. Walter De Gruyter, Berlín. 1991.

VANICECK, KRAKIWSKY, Geodesy. North Holland. NY.